COMPITO SCRITTO DI FISICA b I + II B

11 luglio 2003

- *Gli studenti che sostengono l'esame di fisica b I devono svolgere solo gli esercizi I-1 e I-2;*
- *gli studenti che sostengono l'esame di fisica b II devono svolgere solo gli esercizi II-1 e II-2;*
- *gli studenti che sostengono l'esame complessivo devono svolgere, a loro scelta, un esercizio tra I-1 e I-2 e uno tra II-1 e II-2.*

Si spieghi in dettaglio il procedimento seguito, il significato dei vari simboli e formule adoperate. Si prega inoltre di fare attenzione alla **leggibilità** *dell'elaborato. Si faccia uso del sistema SI.*

Esercizio I-1

Si consideri una sfera di raggio b su cui sia stata fissata una distribuzione di carica $\sigma = \sigma_0 cos(\theta)$, con θ angolo azimutale. A distanza $d >> b$ sull'asse x è posto un guscio sferico di materiale dieletrettico (costante dieletrettica relativa ε_r) di raggio interno a e raggio esterno $b >> a$.
Si calcoli:
a) il momento di dipolo dovuto alla distribuzione di carica σ,
b) il campo elettrico generato dalla sigma nel punto in cui si trova il guscio sferico,
c) trovare il valore del campo elettrico nel buco del guscio sferico,
(Suggerimento: Si consideri il guscio dielettrico come una sfera piena dielettrica polarizzata con all'interno una sfera concentrica con polarizzazione opposta in modo da ottenere per sovrapposizione il buco. Si consideri inoltre che essendo $b >> a$ il campo elettrico nel dielettrico puó essere considerato uniforme.)

Esercizio I-2

Esistono due modi classici di stimare il raggio dell'elettrone a partendo dalla sua carica e, dalla sua massa m e da considerazioni di energia elettromagnetica.

i) L'elettrone a riposo viene considerato come una sfera uniformemente carica, e si pone la sua energia elettrostatica pari a mc^2.

ii) Si considera l'elettrone in moto e si pone la sua energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$ uguale all'energia del campo magnetico al di fuori della sfera di raggio a.

Calcolare, e confrontare, i due valori per il raggio dell'elettrone.

Esercizio II-1

Problema: energia e impulso trasmessi da un'onda riflessa e rifratta attraverso la superficie di separazione tra due mezzi

Considerate un'onda piana di frequenza ω incidente perpendicolarmente alla superficie piana s di separazione tra due semispazi di costanti dielettriche relative ε_r e ε'_r, e permeabilità magnetiche relative uguali a 1.

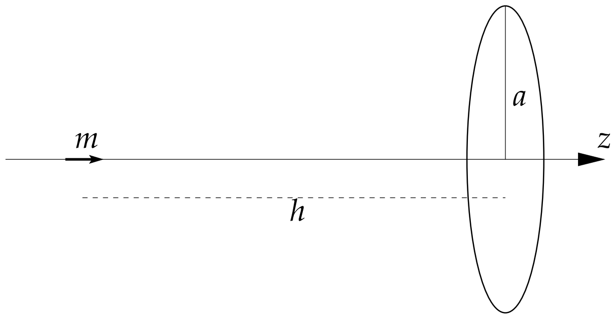

Figure 1: Esercizio II-2

1) Scrivere i campi elettrico e magnetico delle onde riflessa e rifratta in funzione del campo dell'onda incidente e degli altri dati del problema.

I flussi di energia e di impulso per unità di superficie e di tempo associati alla radiazione in un mezzo sono

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}, \qquad \mathbf{G} = c\mathbf{D} \wedge \mathbf{B}.$$

2) Dimostrare la conservazione di energia sulla superficie s.

3) Calcolare la pressione di radiazione P agente sulla superficie s. Ci sono casi in cui la superficie s viene *attratta* verso l'onda incidente?

4) Studiare lo stesso problema nel caso che il secondo semispazio sia un conduttore perfetto e interpretare il significato dei risultati.

Esercizio II-2

Un dipolo magnetico $\vec{m}$ è situato sull'asse z di una spira circolare fissa di raggio a ad una distanza h dal dipolo, come in figura.

a) Si calcoli il flusso di campo magnetico del dipolo sulla superficie della spira.

Il dipolo è posto in oscillazione lungo z attorno ad h con una legge del tipo: $b \times \sin(\omega t)$ con $b \ll h$ e $b \ll a$.

Sapendo che la spira ha resistenza elettrica R e coefficiente di autoinduzione L,

b) Si determini la corrente che a regime circola nella spira, sviluppando ove necessario in serie lineare in b.

c) determini, a regime, la forza che agisce sulla spira a causa dell'interazione con il dipolo, sempre nell'approssimazione lineare in b.

SOLUZIONI DEL COMPITO SCRITTO DI FISICA b I + II B

11 luglio 2003

Esercizio I-1

a)
Il momento di dipolo si calcola tramite la formula, dove σ è la densità di carica superficiale:

$$\mathbf{p} = \int_S dS \ \sigma \ \mathbf{r}$$

Per ragioni di simmetria il momento di dipolo ha un'unica componente diversa da zero, quella lungo l'asse z.

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= 2\pi a^2 \int d\cos\theta \ \sigma_0 \cos\theta \ a\cos\theta \\
&= 2\pi a^3 \sigma_0 \int_{-1}^{1} dx x^2 \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3 \sigma_0
\end{aligned}$$

b)
Il campo può essere calcolato utilizzando lo sviluppo in multipoli della distribuzione di carica. Si vede subito che l'unico termine diverso da zero è proprio quello di dipolo. Il campo dunque nel punto in cui si trova il guscio sferico vale:

$$\begin{aligned}
E_z &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{d^3} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\sigma_0\frac{a^3}{d^3}
\end{aligned}$$

c)
Per calcolare il campo elettrico nel buco si procede scrivendo i campi elettrici nelle varie zone: fuori dal dielettrico, dentro il dielettrico e nel buco in modo generale e applicando le equazioni di continuità dei campi.
Possiamo trattare il buco considerando la sfera dielettrica piena di raggio b con al centro una sfera concentrica di raggio a di polarizzazione uguale ma di segno opposto. La sovrapposizione delle due polarizzazioni riproduce il buco, e il campo totale risulta dalla sovrapposizione dei vari campi. Identifichiamo quindi con p_1 il dipolo della sfera di raggio b e con p_2 quello della sfera di raggio a. Possiamo dividere lo spazio in 3 regioni:

$$\begin{aligned}
I &: r > b \\
II &: a < r < b \\
III &: r < a
\end{aligned}$$

Nella regione I il campo elettrico E_I è dato dalla sovrapposizione del campo elettrico del dipolo p più quello dei due dipoli indotti nel dielettrico p_1 e p_2, mentre nella regione I il campo elettrico comprende sempre il contributo di p_2, ed una componente uniforme E_1 dovuta alla polarizzazione P_1. Nella regione III si ha un campo uniforme $\mathbf{E_2}$:

$$\mathbf{E_I} = \mathbf{E_p} + \mathbf{E_p 1} + \mathbf{E_p 2}$$
$$\mathbf{E_{II}} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_p 2}$$
$$\mathbf{E_{III}} = \mathbf{E_2}$$
$$\mathbf{D_I} = \varepsilon_0 \mathbf{E_I}$$
$$\mathbf{D_{II}} = \varepsilon \mathbf{E_{II}}$$
$$\mathbf{D_{III}} = \varepsilon_0 \mathbf{E_{III}}$$

La componente tangenziale del campo elettrico si conserva passando dalla regione senza dielettrico a quella con dielettrico, mentre si conserva la componente perpendicolare del campo di induzione $\mathbf{D}$. La condizione $b >> a$ permette di trascurare la perturbazione del campo di p_2 lontano da $r = a$ e quindi considerare E_1 uniforme, difatti con questa ipotesi $p_2 = -\frac{a^3}{b^3} p_1$ ed il tutto risulta consistente. Con questa approssimazione è lecito utilizzare la condizione di proporzionalità tra la polarizzazione di P_1 e E_1:

$$E_1 sin\theta = E_p sin\theta - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_1}{b^3} sin\theta$$
$$P_1 = \varepsilon_0 \chi E_1$$
$$p_1 = \frac{4\pi}{3} b^3 P_1$$
$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

Sostituendo nelle varie equazioni scritte sopra si trova che:

$$E_1 = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_p$$
$$P_1 = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} E_p$$
$$p_1 = \frac{4\pi b^3 \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} E_p$$

Per quanto riguarda la regione III non possiamo trascurare l'influenza del campo E_2, ma possiamo utilizzare le condizioni di continunuità dei campi:

$$E_2 sin\theta = E_1 sin\theta - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_2}{a^3} sin\theta$$
$$E_2 cos\theta = \varepsilon_r \left(E_1 cos\theta + \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_2}{a^3} cos\theta \right)$$

Andando a risolvere il sistema di equazioni per E_2 e p_2 si trova:

$$E_2 = \frac{9\varepsilon_r}{(\varepsilon + 2)(2\varepsilon + 1)}$$
$$p_2 = -\frac{a}{b}^3 p_1$$

Esercizio I-2

i) L'energia di una sfera di raggio a carica uniformemente con densità volumica ρ vale

$$U = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0} \text{ con } \rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3},$$

quindi

$$U = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 a} = mc^2 = \frac{m}{\varepsilon_0\mu_0}$$

da cui

$$a = \frac{3\mu_0 e^2}{20\pi m}$$

ii) Il campo magnetico generato da una carica e che viaggia con velocità $\vec{v}$ vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{v}\wedge\hat{r}}{r^2}$$

dove $\vec{r}$ è la distanza del punto in cui si calcola il campo dalla carica, e $\hat{r}$ il suo versore, mentre la densità di energia magnetica per unità di volume vale $u = \frac{1}{2\mu_0}B^2$. L'elemento di volume in coordinate sferiche si scrive $dV = r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr$, quindi l'energia magnetica al di fuori della sfera di raggio a vale

$$U = \frac{1}{2\mu_0} = \int\left(\frac{\mu_0 ev\sin\vartheta}{4\pi r^2}\right)^2 r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{32\pi^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta d\vartheta\int_a^{\infty}\frac{dr}{r^2}$$

svolgendo gli integrali otteniamo

$$U = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{12\pi a} = \frac{1}{2}mv^2 \text{ da cui } a = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi m} \approx 2\times 10^{-15}\text{ m}$$

Esercizio II-1

1) Indichiamo con un apice le quantità che si riferiscono all'onda rifratta e con due apici quelle che si riferiscono all'onda riflessa. Abbiamo

$$\mathbf{k}'' = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k}' = \mathbf{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon'_r}}.$$

Scegliamo terne ortogonali in modo che i campi magnetici abbiano tutto lo stesso verso. I campi elettrici sono

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{n}c\widehat{\mathbf{k}}\wedge\mathbf{B}, \qquad \mathbf{E}'' = \frac{1}{n}c\widehat{\mathbf{k}}\wedge\mathbf{B}'', \qquad \mathbf{E}' = -\frac{1}{n'}c\widehat{\mathbf{k}}\wedge\mathbf{B}',$$

dove $n = \sqrt{\varepsilon_r}$, $n' = \sqrt{\varepsilon'_r}$. Le condizioni al contorno danno

$$B + B'' = B', \qquad E - E'' = E',$$

ovvero

$$B + B'' = B', \qquad B - B'' = \frac{n}{n'}B',$$

da cui

$$B' = \frac{2n'}{n+n'}B, \qquad B'' = \frac{n'-n}{n'+n}B, \qquad E' = \frac{2}{n+n'}cB, \qquad E'' = \frac{1}{n}\frac{n'-n}{n'+n}cB.$$

2) Il vettore di Poynting nel semispazio dell'onda incidente, calcolato sulla superficie s è uguale a

$$S = \mu_0(E - E'')(B + B'') = 4\mu_0 cB^2 \frac{n'}{(n'+n)^2}.$$

Nel semispazio dell'onda rifratta è

$$S' = \mu_0 E' B' = 4\mu_0 cB^2 \frac{n'}{(n+n')^2} = S.$$

3) Il vettore impulso nel semispazio dell'onda incidente, calcolato sulla superficie s è

$$G = c\varepsilon_0 n^2 (E - E'')(B + B'') = 4\varepsilon_0 B^2 c^2 \frac{n^2 n'}{(n'+n)^2},$$

mentre nell'altro semispazio è

$$G' = c\varepsilon_0 n'^2 E' B' = 4\varepsilon_0 B^2 c^2 \frac{n'^3}{(\varepsilon_r + \varepsilon_r')^2},$$

da cui

$$\Delta p = G - G' = 4\varepsilon_0 B^2 c^2 n' \frac{n - n'}{n' + n} = P.$$

Questa è proprio la pressione di radiazione, che è appunto una variazione di impulso per unità di superficie e di tempo. Se $n' > n$ la superficie s viene attratta dall'onda incidente.

4) In un conduttore perfetto si annullano sia il campo elettrico che il campo magnetico. La condizione al contorno sulla componente tangenziale di H non vale, perché si creano delle correnti superficiali. Abbiamo allora

$$E - E'' = 0,$$

ovvero

$$E'' = E = -\frac{1}{n}cB, \qquad B'' = B.$$

Il vettore di Poynting e il vettore impulso nel semispazio dell'onda incidente, calcolati sulla superficie s si annullano:

$$S = \mu_0(E - E'')(B + B'') = 0, \qquad G = c\varepsilon_0\varepsilon_r(E - E'')(B + B'') = 0.$$

In questo caso $\Delta p = 0$, per cui non viene ceduto impulso alla superficie di separazione. La ragione è che l'onda incidente e quella riflessa formano, per sovrapposizione, un'onda stazionaria.

Esercizio II-2

Il campo di dipolo magnetico a distanza $\overrightarrow{r}$ da esso vale:

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{m}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\{\frac{3(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{r})}{r^5} - \frac{\overrightarrow{m}}{r^3}\} \tag{0.1}$$

la componente normale del campo sulla spira a un raggio ρ interno ad essa e a distanza z tra il piano della spira e il dipolo vale:

$$B_\perp = \frac{\mu_0}{4}[\frac{3m(\cos\theta)^2}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} - \frac{m}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}] \tag{0.2}$$

con

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}} \tag{0.3}$$

integrando in ρ sulla superficie del cerchio si ottiene il flusso:

$$\Phi(\overrightarrow{B}) = \frac{\mu_0 m a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}} \tag{0.4}$$

La posizione del dipolo varia come $z = h + b\sin wt$ quindi il flusso varia con il tempo:

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 m a^2}{(a^2+h^2+2bh\sin wt + b^2\sin^2 wt)^{3/2}} \tag{0.5}$$

trascurando il termine quadratico in b e raccogliendo a fattore $\frac{1}{(a^2+h^2)^{3/2}}$ si ottiene

$$\Phi(\overrightarrow{B}) = \frac{\mu_0 m a^2}{(h^2+a^2)^{3/2}}\{1 + \frac{2hb\sin wt}{(a^2+h^2)}\}^{-3/2} \tag{0.6}$$

che sviluppato al I ordine in b diventa:

$$\Phi(\overrightarrow{B}) = \frac{\mu_0 m a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}\{1 - \frac{3hb\sin wt}{(a^2+h^2)}\} \tag{0.7}$$

L'equazione per la corrente sulla spira vale:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\mu_0 m a^2 hwb\cos wt}{(a^2+h^2)^{5/2}} \equiv X\cos wt \tag{0.8}$$

La soluzione dell'omogenea associata e' un esponenziale decrescente mentre quella a regime e' la soluzione particolare che cerchiamo del tipo:

$$i(t) = A\cos wt + B\sin wt \tag{0.9}$$

con A e B costanti che si determinano con l'inserimento della soluzione particol;are nell'equazione differenziale con il risultato:

$$i(t) = X\frac{R\cos wt + Lw\sin wt}{R^2+L^2w^2} \tag{0.10}$$

L'energia W di un circuito con corrente i indotta immerso in un campo magnetico vale(Φ_T e' il flusso totale sulla spira):

$$W = -\frac{1}{2}\Phi_T i = -\frac{1}{2}(Li^2 - \Phi i) \tag{0.11}$$

quindi la forza a un determinato istante t e' diretta lungo z e vale:

$$F_z = -\frac{\partial W}{\partial h} = \frac{i}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial h} \tag{0.12}$$

la corrente i e' gia' lineare in b quindi per avere la forza lineare in b sara' sufficiente per Φ considerare solo il termine che non dipende da b (ordine 0):

$$F_z = \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial h}\{\frac{\mu_0 m a^2}{(h^2+a^2)^{3/2}}\} = -9\frac{\mu_0^2 m^2 a^4 w h^2 b}{2(a^2+h^2)^5}\frac{R\cos wt + Lw\sin wt}{R^2 + L^2 w^2} \tag{0.13}$$

La forza di puo' determinare anche dalla definizione diretta:

$$\overrightarrow{F} = i\int d\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B} \tag{0.14}$$

solo la componente radiale di $\overrightarrow{B}$ contribuisce:

$$\overrightarrow{B}_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3m\cos\theta}{r^3}\frac{\overrightarrow{r}}{r} \tag{0.15}$$

$d\overrightarrow{l}$ e $\overrightarrow{B}_r$ sono perpendicolari tra loro ma della forza risultante $d\overrightarrow{F}$ solo la componente lungo z e' effettiva: $dF_z = iB_r a\sin\theta d\theta$

che integrata su θ riproduce il risultato ottenuto con l'energia.