COMPITO SCRITTO DI FISICA b I + b II

19 Settembre 2003

- *Gli studenti che sostengono l'esame di fisica b I devono svolgere solo gli esercizi I-1 e I-2;*
- *gli studenti che sostengono l'esame di fisica b II devono svolgere solo gli esercizi II-1 e II-2;*
- *gli studenti che sostengono l'esame complessivo devono svolgere, a loro scelta, un esercizio tra I-1 e I-2 e uno tra II-1 e II-2.*

Si spieghi in dettaglio il procedimento seguito, il significato dei vari simboli e formule adoperate. Si prega inoltre di fare attenzione alla **leggibilità** *dell'elaborato. Si faccia uso del sistema SI.*

Esercizio I-1

All'interno di una sfera di raggio a abbiamo una densità volumica di carica elettrica positiva uniforme ρ. Sulla superficie della sfera stessa abbiamo una distribuzione superficiale di carica elettrica negativa $\sigma = -a\rho/3$.

$i)$ Calcolare la carica elettrica complessiva della sfera.

$ii)$ Calcolare l'energia elettrostatica della sfera.

La sfera ruota attorno ad un proprio diametro con velocità angolare costante ω.

$iii)$ Calcolare il momento magnetico della sfera.

La sfera ha un momento di inerzia I, quindi il suo momento angolare $\vec{L} = I\vec{\omega}$ è proporzionale al suo momento magnetico $\vec{m}$. La sfera si trova adesso immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}_0$, col quale il momento angolare forma un angolo ϑ. Nell'ipotesi che B_0 sia sufficientemente piccolo,

$iv)$ calcolare la frequenza di Larmor (frequenza di precessione) della sfera e discutere la validità dell'approssimazione.

Esercizio I-2

Sia data la distribuzione di carica disegnata in figura. Essa consiste di otto cariche poste nei vertici di un cubo di lato a, con valori $\pm q$, a segni alterni.

1) Calcolare i momenti di dipolo e di quadrupolo del sistema.

2) Calcolare il potenziale lungo la retta passante per una diagonale del cubo, a distanze r molto maggiori di a. Si scriva

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r_i^2 - 2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

Si faccia lo sviluppo di grandi distanze usando

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{1}{2}a(a-1)x^2 + \frac{1}{6}a(a-1)(a-2)x^3 + \cdots$$

e si tenga solo il primo contributo non nullo.

3) Sia data una sferetta conduttrice scarica di raggio b posta lungo la diagonale a distanza d molto maggiore di a e di b. Calcolare la forza che agisce sulla sfera.

4) Calcolare i momenti di quadrupolo delle due varianti in figura. La prima configurazione è come sopra, colla differenza che le cariche sono disposte sui vertici di un parallelepipedo di altezza b e base quadrata di lato a. La seconda configurazione consiste di quattro dipoli posti nei vertici di un quadrato, con orientazioni perpendicolari al piano del quadrato e versi alterni.

Esercizio II-1

Una sferetta di raggio R si trova a una distanza d dal sole. Sapendo che intensita' della luce solare incidente sulla superficie terrestre (a distanza a dal sole) e' $K = 1400 \cdot W/m^2$
a)si calcoli la forza sulla particella dovuta alla radiazione supponendo che questa venga tutta assorbita.
La sferetta abbia una densita'$\rho = 1.0 \cdot gr/cm^3$ e sia soggetta anche alla attrazione solare.
b)Si determini il raggio R_0 per cui tutte le sferette con raggio inferiore sono espulse dal sistema solare dimostrando che R_0 non dipende da d.
c)Caso numerico: $a = 1.5 \cdot 10^8 km$, $G(Newton) = 6.7 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, M_S(massa del sole)=$2 \cdot 10^{30} kg$.

Esercizio II-2

Due spire conduttrici coplanari e coassiali hanno raggi che con buona approssimazione possono considerarsi uguali, sezione del filo trascurabile e resistenza R e coefficiente di autoinduzione L. La spira interna è libera di ruotare attorno all'asse zz' e inizialmente e' percorsa da corrente i_0, mentre la spira esterna è fissa e collegata ad un generatore ideale di corrente che eroga la corrente I (entrambe scorrono nello stesso verso), come in Fig. 2.
Ad un tempo t=0 ed in un tempo trascurabile, rispetto al tempo caratteristico del sistema, la spira interna viene ruotata di 90^o e fermata.
a) Si calcoli la relazione tra il coefficiente di autoinduzione L delle spire e quello di mutua induzione M sia al tempo $t < 0$ (quando le spire sono coplanari) sia a $t > 0$ (dopo aver effettuato la rotazione) (*Si noti che non c'è bisogno di nessun calcolo per rispondere a questa domanda*).
b) Supponendo trascurabile la caduta ohmica nella spira interna durante la rotazione, si calcoli la corrente che circola in essa all'istante dell'arresto.
c) Si calcoli il lavoro fornito dal generatore di corrente durante la rotazione.
d) Sapendo che l'energia dissipata nella spira interna per effetto joule durante il tempo transitorio di scarica successivo alla rotazione della spira è L_j, si determinino i coefficienti di auto e mutua induzione del punto a in funzione di L_j.
e) Si calcoli il lavoro meccanico speso per far ruotare la spira.

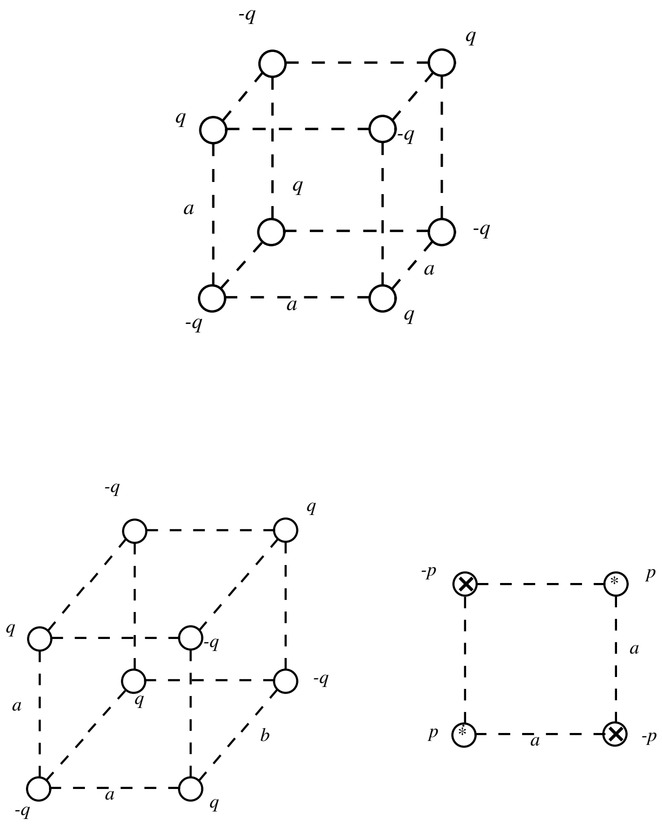

Figure 1: Figura dell'esercizio I-2

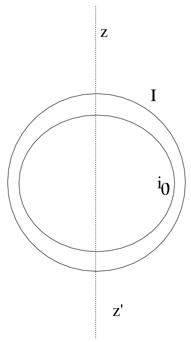

Figure 2: Figura dell'esercizio II-2

Soluzioni

Esercizio I-1

i) La carica totale della sfera è nulla

ii) L'energia può essere calcolata integrando la densità di energia $u = \varepsilon_0 E^2/2$ su tutto lo spazio. Il campo elettrico vale $E = \rho r/(3\varepsilon_0)$ all'interno della sfera, ed è nullo al di fuori. Abbiamo quindi

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{90\varepsilon_0}$$

iii) Il momento magnetico di una superficie sferica carica uniformemente con densità σ che ruota attorno ad un suo diametro con velocità angolare ω può essere calcolato, in un sistema di riferimento polare con l'asse z lungo l'asse di rotazione, integrando i momenti magnetici delle spirette tra ϑ e $\vartheta + d\vartheta$. Su ogni spiretta vi sarà una carica $dq = \sigma \cdot 2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta$, che corrisponde ad una corrente $dI = \sigma\omega r^2 \sin\vartheta d\vartheta$. Il momento magnetico dm si ottiene moltiplicando dI per l'area della spira $\pi r^2 \sin^2\vartheta$. Il momento magnetico complessivo di una superficie sferica carica rotante sarà quindi

$$m = \sigma\pi\omega r^4 \int_0^\pi \sin^3\vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}\sigma\pi\omega r^4$$

Il contributo del guscio negativo si ottiene ponendo $r = a$ e $\sigma = -a\rho/3$

$$m_2 = -\frac{4}{9}\rho\pi\omega a^5$$

Il momento magnetico della sfera piena si può ottenere integrando il momento magnetico dei gusci tra r e $r + dr$, ognuno con densità di carica superficiale $\sigma = \rho dr$

$$m1 = \frac{4}{3}\pi\omega\rho\int_0^a r^4 dr = \frac{4}{15}\pi\rho\omega a^5$$

Il momento magnetico complessivo della sfera vale quindi

$$m = m_1 + m_2 = -\frac{8}{45}\pi\omega\rho a^5$$

iv) La sfera ha un momento angolare $\vec{L} = I\vec{\omega}$, ed è sottoposta ad un momento meccanico $\vec{\Gamma} = \vec{m}\wedge\vec{B}_0$. Tra il momento magnetico ed il momento angolare abbiamo una relazione di proporzionalità $\vec{m} = -\gamma\vec{L}$, con

$$\gamma = \frac{8\pi\rho a^5}{45I}$$

ed avremo la relazione

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_L \wedge \vec{L} = -\gamma\vec{L}\wedge\vec{B}_0$$

che corrisponde ad una precessione di Larmor con frequenza

$$\omega_L = \gamma B_0 = \frac{8\pi\rho a^5 B_0}{45I}$$

con $\vec{\omega}_L$ diretto lungo $\vec{B}_0$. La condizione di validità è $\omega_L \ll \omega$, quindi

$$B_0 \ll \frac{45I\omega}{8\pi\rho a^5} = \frac{\omega}{\gamma}$$

Esercizio I-2

1) Si considerino due facce parallele del cubo. Ciascuna ha carica totale zero e momento di dipolo nullo. Quindi il momento di dipolo del cubo è nullo. Inoltre, i momenti di quadrupolo di ciascuna faccia non dipendono dai punti in cui vengono calcolati. Li si calcolino nel centro del cubo. Per simmetria, i momenti di quadrupolo delle due facce parallele sono uguali e opposti. Ciò segue dal fatto che il momento di quadrupolo è quadratico nelle distanze e lineare nelle cariche. Pertanto il momento di quadrupolo del cubo è nullo.

2) Il potenziale nel punto $\mathbf{r}$ è

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|},$$

dove $q_i = \pm q$ e $\mathbf{r}_i = (a/2)(\pm1,\pm1,\pm1)$. Utilizzando l'espansione suggerita si ha

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_i q_i\left(1+\frac{r_i^2-2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{r^2}\right)^{-1/2} \sim \\ &\sim \frac{5}{64\pi\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^4}\sum_i q_i\,(\widehat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i)^3 . \end{aligned}$$

Lungo la diagonale è $\widehat{\mathbf{r}} = (1,1,1)/\sqrt{3}$, per cui

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) \sim & \frac{5}{192\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}\frac{a^3 q}{r^4}\Big[(1+1+1)^3-(1+1-1)^3-(1-1+1)^3+ \\ & -(-1+1+1)^3+(1-1-1)^3+(-1+1-1)^3+(-1-1+1)^3-(-1-1-1)^3\Big] = \\ = & \frac{5q}{4\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^4}. \end{aligned}$$

3) Il campo elettrico è

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{5q}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^5}\widehat{\mathbf{d}},$$

dove $\widehat{\mathbf{d}}$ è il versore lungo la diagonale. Sulla sferetta viene indotto un momento di dipolo elettrico

$$\mathbf{p} = -\frac{20q}{\sqrt{3}}\frac{a^3 b^3}{d^5}\widehat{\mathbf{d}}.$$

La forza si ottiene come gradiente dell'energia

$$U(d) = -\frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = -\frac{50q^2a^6b^3}{3\pi\varepsilon_0 d^{10}},$$

cioè

$$F = -\frac{\partial U(d)}{\partial d} = -\frac{500q^2a^6b^3}{3\pi\varepsilon_0 d^{11}},$$

naturalmente attrattiva.

4) Per il parallelepipedo si ragiona come nel punto 1) scegliendo come facce parallele le due basi quadrate: il momento di quadrupolo è ancora nullo. Il caso del quadrato di dipoli è ovviamente un caso limite del parallelepipedo e quindi anche il suo momento di quadrupolo è nullo.

Esercizio II-1

a)La pressione di radiazione (componente normale della forza sulla superficie) dipende dall'angolo di incidenza della luce sulla superficie secondo la nota formula:

$$P_{rad} = u\cdot cos^2(\vartheta)$$

dove u e' la densita' di energia del campo elettromagnetico, $u = I/c$, con I intensita' dell'onda. Per il calcolo della forza totale dobbiamo integrare la componente della pressione lungo la direzione di propagazione dell'onda, sulla superficie della semisfera esposta; questa e' effettuata integrando su coroncine circolari di superficie $dA = 2\pi(Rsin(\vartheta)Rd\vartheta = 2R^2 sin(\vartheta)d\vartheta$:

$$F = \int_0^{\pi/2} P_{rad} \cdot dA \cdot cos(\vartheta) = \int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 \cdot u \cdot cos^3(\vartheta) \cdot sin(\vartheta) \cdot d\vartheta = \frac{\pi R^2}{2} u$$

Se la sferetta si trova a distanza d dal sole, siccome l'intensita' I decresce con il quadrato della distanza sara':

$$I = K\frac{a^2}{d^2}$$

Oltre al contributo della pressione dovuto al flusso dell'impulso dell'onda perpendicolare alla superficie, c'è anche quello tangenziale alla superficie la cui densità è $u\sin^2(\theta)$ e che integrato mi dà un contributo eguale a quello perpendicolare. Quindi la forza F dovuta alla radiazione sara':

$$F = 2\frac{\pi R^2}{2}\frac{I}{c} = \frac{\pi R^2}{2c}K(\frac{a}{d})^2$$

b)La forza F_N gravitazionale sulla sferetta vale:

$$F_N = G\frac{M_S}{d^2}\frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Si noti che sia la forza di radiazione che quella di gravita'decrescono come $1/d^2$ quindi il rapporto tra le due e' indipendente dalla distanza d. Invece mentre la forza di radiazione cresce come R^2, quella di gravita cresce come R^3 e il valore del raggio R_0 a cui si bilanciano e':

$$R_0 = \frac{3}{4c}\frac{Ka^2}{\rho G M_S}$$

Tutte le particelle con raggio $R < R_0$ saranno quindi espulse.
c) Con i valori dati dal problema $R_0 = 0.6\mu m$.

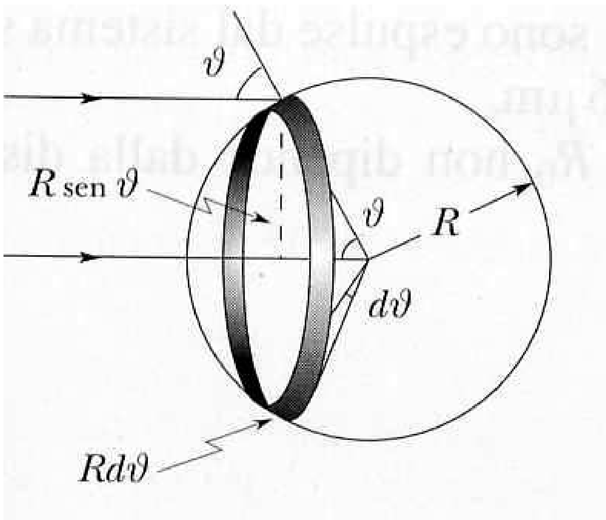

Figure 3:

Esercizio II-2

a)
Indichiamo con M_0 il coefficiente di mutua induzione a $t < 0$ e con M quello dopo aver effettuato la rotazione. Per ragioni di simmetria il flusso totale generato dalla spira esterna su quella interna dopo la rotazione è nullo e quindi $M = 0$. Invece dato che i raggi delle due spire sono identici e che sono poste sullo stesso piano e sullo stesso asse si ha che M_0=L.

b)
Durante la rotazione la f.e.m. ai caoi della spira interna è:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\,(MI + Li)}{dt} = Ri \tag{1}$$

Avvenendo la rotazione molto velocemente, si può trascurare l'effetto della resistena R, ossia possiamo considerare il flusso del campo magnetico come una quantità conservata. Ne deriva che:

$$Li_0 + M_0 I = Li_f \tag{2}$$

Essendo $M_0 = L$ si ha che $i_f = i_0 + I$
c)
Il lavoro compiuto dal generatore di corrente si ottiene facilmente integrando la potenza dissipata sia a causa della presenza della resistenza, sia dovuta alla forza elettromotrice indotta:

$$L_g = \int_0^{\Delta t} \left(RI^2 + \epsilon I \right) dt = RI^2 \Delta t + \Delta\Phi = RI^2 \Delta t + I\Delta(Mi) \tag{3}$$

Essendo $\Delta(Mi) = -M_0 i_0 = -Li_0$, risulta che $L_g = RI^2\Delta t - Li_0 I$
Essendo Δt, il tempo di rotazione della spira, molto piccolo: $L_g = -Li_0 I$.
d)
Durante il transiente successivo alla rotazione l'energia immagazzinata nell'induttanza si dissipa per effetto joule, quindi indicando con U l'energia potenziale e tenendo presente che alla fine l'energia potenziale è zero:

$$U_i = \frac{1}{2} L i_f^2 \tag{4}$$

$$U_f = 0 \tag{5}$$

$$L_j = \Delta U = \frac{1}{2} L (I + i_0)^2 \tag{6}$$

e)
Dalla conservazione dell'energia segue che il lavoro delle forze esterne L_m necessario per ruotare la sbarretta risulta essere:$L_m = \Delta U - L_g + L_{joulerotazione}$, dove $L_{joulerotazione}$ è l'energia dissipata per effetto joule durante la rotazione. Poichè questa avviene in un tempo molto piccolo, può essere trascurata (come abbiamo fatto nella domanda *a*), rimane quindi:

$$L_m = \Delta U - L_g = U_f - U_i - L_g \tag{7}$$

Dove con U si indica l'energia magnetica totale delle due spire. Risulta quindi, essendo nullo il coefficiente di mutua induzione dopo la rotazione:

$$L_m = \frac{1}{2} L i_f^2 + \frac{1}{2} L I^2 - \frac{1}{2} L i_0^2 - \frac{1}{2} L I^2 - M_0 I i_0 + L I i_0 \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2} L I^2 + L I i_0 \tag{9}$$