COMPITO SCRITTO DI FISICA b I + b II

20 giugno 2003

- *Gli studenti che sostengono l'esame di fisica b I devono svolgere solo gli esercizi I-1 e I-2;*
- *gli studenti che sostengono l'esame di fisica b II devono svolgere solo gli esercizi II-1 e II-2;*
- *gli studenti che sostengono l'esame complessivo devono svolgere, a loro scelta, un esercizio tra I-1 e I-2 e uno tra II-1 e II-2.*

Si spieghi in dettaglio il procedimento seguito, il significato dei vari simboli e formule adoperate. Si prega inoltre di fare attenzione alla **leggibilità** *dell'elaborato. Si faccia uso del sistema SI.*

Esercizio I-1

Un dipolo elettrico $\vec{p}$ si trova a distanza x da un piano conduttore infinito. Il dipolo forma un angolo α con l'asse delle x.

a) Calcolare la forza che agisce sul dipolo.
b) Calcolare il momento meccanico che agisce sul dipolo.

Esercizio I-2

Abbiamo un cilindro pieno di materiale con costante dielettrica relativa ε_r, di raggio R e altezza h. Il cilindro ruota attorno al proprio asse con velocità angolare ω, ed è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ parallelo all'asse stesso.

a) Calcolare la polarizzazione per unità di volume del cilindro.
b) Calcolare la densità volumica di carica di polarizzazione ρ_p all'interno del cilindro.
c) Calcolare la densità suprficiale di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie laterale del cilindro.

Esercizio II-1

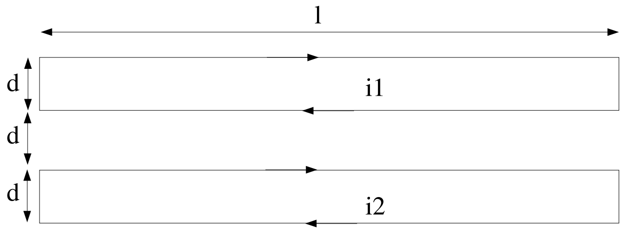
Una nave percorre una rotta parallela alla costa alla distanza di circa 100 km da questa e alla velocità di 18 nodi (v. nota 1). Un marinaio a bordo della nave sta ascoltando un programma musicale, sulla frequenza di 1200 kHz (v. nota 2), trasmesso da una stazione situata sulla costa, in direzione perpendicolare alla rotta.
L'altezza del segnale varia regolarmente col tempo apparendo e scomparendo e l'intervallo tra il massimo ed il minimo è 2 minuti. Nei momenti di massima intensità, il segnale ricevuto dall'antenna è stimato a circa 12 mV/m, pari a circa 8 volte il livello di rumore (v. nota 3).
Si fa l'ipotesi che una seconda stazione costiera vicina alla prima (v. nota 4) abbia iniziato a trasmettere per errore in fase e sulla stessa frequenza.
Inquadrando i fenomeni nell'ambito dell'esperimento di Young stimare, fornendo i risultati numerici:
a) La distanza tra le due stazioni;
b) La potenza emessa da ciascuna delle due stazioni.

Note:
0. Si trascuri ogni effetto dovuto alla sfericità della Terra.
1. Un nodo è pari ad un miglio nautico (circa 1.8 km) all'ora.
2. Si consideri solo la cosiddetta "portante" come un'onda monocromatica.
3. Si intende che il segnale "scompare" quando è inferiore al livello di rumore.
4. Si ipotizza, salvo verifica, che la distanza tra le stazioni sia molto minore della distanza tra queste e la nave.

Esercizio II-2

Siano date 2 linee bifilari rigide poste sullo stesso piano secondo la geometria della figura: $l >> d$.

a) Si determini il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti specificando anche il segno.
Nelle due linee due appositi generatori di corrente mantengono costanti le correnti con valori i_1 e i_2, dirette come in figura. Le resistenze elettriche siano trascurabili.
b) Si detrmini in modulo direzione e verso la forza esterna necessaria a mantenere i due circuiti nella posizione della figura.
c) Lasciando infine uno dei due circuiti libero di muoversi sul piano, e data la sua massa m, si determini la sua velocità a distanza infinita.



SOLUZIONI DEL COMPITO SCRITTO DI FISICA b I + II B

Esercizio I-1

Il problema si rislve col metodo delle immagini. L'immagine del dipolo reale e' un dipolo $\vec{p}$ a distanza $-x$ dal piano conduttore, e formante un angolo $-\alpha$ con l'asse delle x. Il dipolo immagine genera, sul dipolo reale, un campo elettrico di componenti

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\alpha}{4x^3}$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\alpha}{8x^3}$$

La forza vale

$$\vec{f} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{E}\cdot\vec{p}\right)$$

da cui

$$f_x = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{3}{4x^4}p^2\frac{2-3\sin^2\alpha}{2}$$

e il momento meccanico vale

$$\vec{\Gamma} = \frac{1}{2}\vec{p}\wedge\vec{E} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{3p^2\sin\alpha\cos\alpha}{8x^3}$$

Esercizio I-2

Le cariche elettriche solidali con il cilindro sono sottoposte ad una forza di Lorentz $\vec{f} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$, cioè ad un campo elettrico equivalente $\vec{E} = \vec{b}\wedge\vec{B}$, quindi la polarizzazione per unità di volume $\vec{p}_v$ vale

$$\vec{p}_v = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\omega B\vec{r}$$

La densità volumica di carica di polarizzazione all'interno del cilindro ρ_p vale $\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{p}_v$. In coordinate cilindriche la divergenza vale

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{p}_v = \frac{1}{r}\frac{\partial(rp_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial p_z}{\partial z}$$

nel nostro caso $\rho_p = -2\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\omega B$.

La densità superficiale di carica di polarizzazione vale $\sigma_p = p_{v\perp}$, quindi

$$\sigma_p = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\omega BR$$

Esercizio II-1

a) La forza esercitata da un circuito sull'altro può essere scritta come sovrapposizione di 4 termini:

$$\begin{aligned}
F_{13} &= -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{2d}l \\
F_{14} &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{3d}l \\
F_{23} &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{d}l \\
F_{24} &= -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{2d}l \\
F_{tot} &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{d}l\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{3d}
\end{aligned}$$

L'effetto risultante è di repulsione.
b) Per determinare il coefficiente di mutua induzione si calcola il flusso del campo magnetico, generato da uno dei due circuiti, attraverso l'altro cirvuito:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_0}{2\pi}i_1\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+d}\right) \\
\Phi(B) &= \frac{\mu_0}{2\pi}i_1\int_d^{2d}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+d}\right)dx = \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi}i_1\left(ln2 - ln(3/2)\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}i_1 ln(4/3)
\end{aligned}$$

Si ricava quindi $M = \frac{\mu_0}{2\pi}ln(4/3)$, da notare che M è negativo.
c) La velocità si trova uguagliando l'energia totale iniziale con quella finale. L'energia magnetica iniziale e finale si scrive:

$$U_i = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + Mi_1 i_2$$

$$U_f = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2$$

Il bilancio energetico in presenza di generatori risulta:

$$\begin{aligned}
U_i + L_g &= U_f + \frac{1}{2}mv^2 \\
L_g &= \int \epsilon_i^{(1)} i_1 dt + \int \epsilon_i^{(2)} i_2 dt = \\
&= \int \frac{d\Phi_{21}}{dt}i_1 dt + \int \frac{d\Phi_{12}}{dt}i_2 dt \\
&= i_1\int_{Mi_2}^{0} d\Phi_{21} + i_2\int_{Mi_1}^{0} d\Phi_{12} = -2Mi_1 i_2
\end{aligned}$$

Utilizzando il bilancio energetico:

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 - 2M i_1 i_2 = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Da cui segue:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -M i_1 i_2$$

Esercizio II-2

a) La lunghezza d'onda del segnale ricevuto è data da:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3.0 \times 10^8}{1.2 \times 10^6} = 250m$$

mentre la distanza tra due massimi (o minimi) del segnale è

$$a = 2v\Delta t = 2 \cdot 120 \cdot 9 = 2.16 \times 10^3 m$$

Essendo 1 nodo pari a circa 0.5 m/s. La distanza tra due massimi consecutivi non dipende dalla differenza di fase tra i segnali emessi e dunque, usando direttamente la formula di Young si ha: $a = \lambda D/d$ da cui $d = \lambda D/a = \frac{cD}{\nu v \Delta t} = 11.6$ km.
b) Sia E_0 il valore del campo elettrico corrispondente alla soglia del rumore; se E_1 e E_2 sono le ampiezze dei campi elettrici emessi dalle due stazioni, le condizioni sui massimi e minimi di intensità si esprimono così:

$$E_1 + E_2 = 8E_0$$
$$E_1 - E_2 = kE_0$$

con k compreso tra $[0, 1]$. Risolvendo il sistema si ottiene:

$$E_1 = (8 + k)E_0/2$$
$$E_2 = (8 - k)E_0/2$$

L'intensità media dell'onda ricevuta può essere messa in relazione con la potenza della stazione emittente e con il campo elettrico all'antenna.

$$I = \frac{W}{4\pi D^2} = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E^2$$

da cui, in unità S.I.

$$W = (2\pi c\epsilon_0)\, D^2 E^2 = (1/60) D^2 E^2$$

Ne segue che la potenza delle due stazioni vale rispettivamente

$$W_1 = (8 + k)^2 D^2 E_0^2/240$$
$$W_2 = (8 - k)^2 D^2 E_0^2/240$$

Sostituendo i valori numerici, al variare di k, si ha:

$$6kW < W_1 < 7.6kW$$
$$6kW > W_2 > 4.6kW$$

Il valore esatto dipende da k, che non è noto.