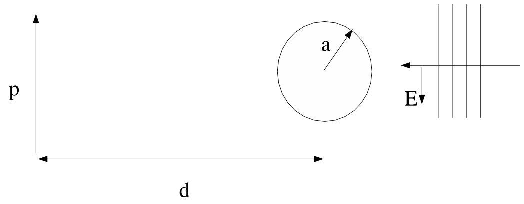
Verifica di Fisica IIB di Maggio2003

Un'onda piana di intensità I oscillante con frequenza ω e lunghezza d'onda λ, incide su una sfera perfettamente conduttrice e completamente riflettente di raggio a, come in figura. A sinistra della sfera, a distanza d da questa, è posizionato un dipolo mantenuto in oscillazione con la stessa frequenza dell'onda incidente ma in controfase. Il valore del dipolo vale $p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E$, dove E è il valore del campo elettrico associato all'onda incidente. Dato che $\lambda >> d >> a$, si può considerare il campo elettrico uniforme su tutta la sfera. Trascurando gli effetti di induzione del dipolo fisso sulla sfera, si risponda a queste domande:

a) Si determinino modulo, intensità e verso del dipolo elettrici indotto sulla sfera dall'onda. (Si cerchi una soluzione del tipo $\mathbf{p} \propto \mathbf{E e^{i\omega t}}$).

b) Assumendo che la sfera possa muoversi solo lungo l'asse di propagazione dell'onda e trascurando l'effetto del campo magnetico si discuta la forza totale agente sulla sfera, sempre in approssimazione di dipolo (Si consideri che la distanza d sia tale da poter trascurare sulla sfera il campo di radiazione emesso dal dipolo).

c) La sfera sia tenuta ferma a distanza d dal dipolo. Si calcoli la distribuzione angolare di energia irraggiata dalla sfera e dal dipolo fisso nei due casi: ad una distanza $r >> d$ ma tale da poter trascurare i ritardi e ad una distanza $r' >> r$ tale da doverli considerare.



Soluzione a)

Trattandosi di un conduttore perfetto non c'è ritardo tra il dipolo indotto ed il campo elettrico. Indicando con $\mathbf{E}$ il campo elettrico dell'onda si ha, imponendo che la componente tangenziale alla superficie della sfera si annulli, che:

$$\mathbf{p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E}$$

b)
Sulla sfera agisce sia la pressione di radiazione, che spinge la sfera verso il dipolo, sia l'interazione dipolo-dipolo tra quello fisso e quello indotto sulla sfera dall'onda. Come prima cosa calcoliamoci la forza dovuta alla pressione di radiazione (vedi figura a sinistra). La $\frac{d\mathbf{F_x}}{d\sigma}$ è data dal nota formula (nel caso di riflessione totale):

$$\frac{d\mathbf{F_x}}{d\sigma} = 2I_0/csin^3(\theta)$$

Dove con θ si indica l'angolo azimutale. Integrando sulla superficie si ha la forza lungo $\hat{x}$:

$$F_x = \pi^2 I_0/ca^2$$

Adesso calcoliamo la forza dovuta all'interazione dei due dipoli. Siamo nel caso di un dipolo immerso in un campo esterno e quindi possiamo scrivere la forza come:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E_{dipolo}}$$

Dove con $\mathbf{E_{dipolo}}$ è il campo prodotto dal campo del dipolo non indotto. La forza risulta dunque (il fattore $1/2$ viene dalla media temporale):

$$F = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 E^2 \frac{3a^6}{d^4}$$

La forza totale risulta quindi:

$$F_{tot} = \pi^2 I_0/ca^2 + 2\pi\epsilon_0 E^2 \frac{3a^6}{d^4}$$

c)
Notiamo che il valore del dipolo indotto é identico a l'altro ma con verso opposto. Se trascuriamo i ritardi abbiamo un sistema con dipolo totale nullo e quindi non abbiamo irraggiamento.
Se invece consideriamo anche i ritardi, allora abbiamo due dipoli che oscillano in controfase e disposti lungo l'asse $\hat{x}$: quindi si ha che la distribuzione angolare dipende da due agoli: quello azimutale θ e quello polare ϕ. Il campo elettrico totale si scrive per sovrapposizione, a parte fasi ininfluenti, come: Indico i ritardi, ossia i vettori che partendo dalla posizione dei dipoli puntano al punto dello spazio nel quale vogliamo calcolare il campo, con R_1 e R_2:

$$R_1^2 = R^2 + (d/2)^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{d/2}$$
$$R_2^2 = R^2 + (d/2)^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{d/2}$$

$$\mathbf{E_{rad}} = \frac{\mathbf{1}}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\omega^2}{\mathbf{Rc^3}}\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{p}) \times \left(\mathbf{exp}^{-\mathbf{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{R_1}} - \mathbf{exp}^{-\mathbf{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{R_2}}\right)$$

Approssimando al primo ordine e considerando che in coordinate polari

$$\mathbf{R} = R\,(sin\theta cos\phi, sin\theta sin\phi, cos\theta)$$
$$\mathbf{d} = (d, 0, 0)$$

si ricava che:

$$R_1 = R(1 - \frac{d}{2R}sin\theta cos\phi)$$
$$R_2 = R(1 + \frac{d}{2R}sin\theta cos\phi)$$

dove si é fatta l'approssimazione che l'angolo θ sia lo stesso per entrambi i dipoli. Come sempre il campo magnetico risulta ortogonale al campo elettrico e quindi possiamo calcolare immediatamente la distribuzione di radiazione emessa scrivendi il modulo del vettore di Poynting ed esplicitando utilizzando al relazione: $(exp^{-ia} - exp^{-ia} = 2isin(a)$.

$$\frac{dI}{d\Omega} \propto sin^2(\theta)\left(sin(2\pi\frac{d/2}{\lambda}sin(\theta)cos(\phi))\right)^2$$