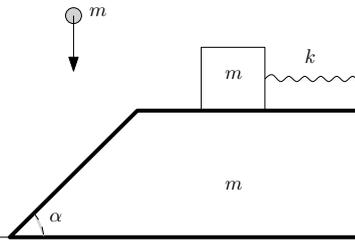


## 1.10. 8 settembre 2011

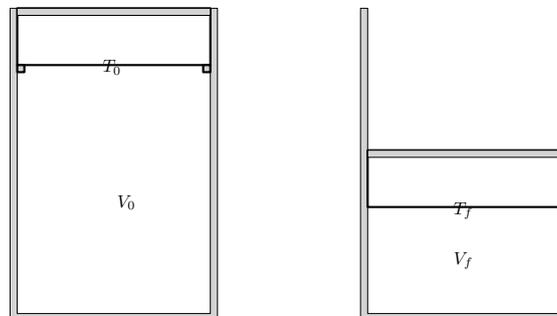
### Problema 1 (15 punti)



Una piattaforma di massa  $m$ , della forma rappresentata in figura, è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Sopra di essa si trova un blocco, pure di massa  $m$ . Piattaforma e blocco sono collegate da una molla di costante elastica  $k$ , inizialmente a riposo. Una terza massa, che si può considerare un punto materiale, viene lasciata cadere sulla superficie obliqua della piattaforma (inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo  $\alpha$ ) in modo da colpirla con velocità  $v_0$ . L'urto è elastico e istantaneo.

1. Calcolare le componenti orizzontali e verticali della velocità del punto materiale dopo l'urto.
2. Scrivere le equazioni del moto della piattaforma e del blocco e le relative condizioni iniziali.
3. Determinare il massimo allungamento della molla.

### Problema 2 (15 punti)



Un recipiente cilindrico di sezione  $S$  impermeabile al calore contiene  $n$  moli di un gas perfetto, ed è chiuso superiormente con un pistone scorrevole di massa  $m$  e capacità termica  $C$ . Il pistone può scambiare calore con il gas, ma il suo lato superiore è isolato termicamente, quindi non sono possibili scambi di calore con l'esterno del sistema.

Inizialmente il pistone è mantenuto fermo con un opportuno vincolo. La sua temperatura (e quella del gas) è  $T_0$  e il volume del gas vale  $V_0$ . Si rimuove quindi il vincolo.

1. Per quali temperature  $T_0$  il pistone si abbassa?

2. Supponendo che  $T_0$  soddisfi la condizione determinata alla domanda precedente, calcolare la temperatura finale  $T_f$  del sistema quando questo raggiunge nuovamente l'equilibrio termodinamico.
3. Calcolare la variazione di entropia del sistema.

## Soluzione primo problema

### Domanda 1

Durante l'urto la molla è a riposo, quindi non applica forze alla piattaforma e si può ignorare il blocco. L'energia e la quantità di moto orizzontale del sistema particella+piattaforma si conservano. Inoltre si conserva la componente parallela al lato obliquo della piattaforma della quantità di moto della particella. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + V^2) \\ 0 &= m(v_x + V) \\ -mv_0 \sin \alpha &= mv_y \sin \alpha + mv_x \cos \alpha\end{aligned}$$

dove  $v_x$ ,  $v_y$  sono le componenti della velocità della particella dopo l'urto cercate, e  $V$  la velocità della piattaforma. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}v_0^2 - v_y^2 &= 2v_x^2 \\ v_0 + v_y &= -v_x \cot \alpha\end{aligned}$$

e quindi (escludendo la soluzione non accettabile  $v_x = 0$ ,  $v_y = -v_0$ )

$$\begin{aligned}v_0 &= v_y - 2v_x \tan \alpha \\ v_0 &= -v_y - v_x \cot \alpha\end{aligned}$$

Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{2 \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - 3} v_0 \\ v_y &= \frac{3 \cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha - 3} v_0\end{aligned}$$

### Domanda 2

Indichiamo con  $X$  la posizione orizzontale dell'estremo della piattaforma a cui è fissata la molla, con  $x$  quella del blocco. Avremo, indicando con  $\ell_0$  la lunghezza a riposo della molla,

$$\begin{aligned}m\ddot{X} &= -k(X - x - \ell_0) \\ m\ddot{x} &= k(X - x - \ell_0)\end{aligned}$$



Le condizioni iniziali saranno le velocità e le posizioni di piattaforma e blocco, ossia

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ \dot{X}(0) &= V \\ x(0) &= -\ell_0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

dove si è scelta l'origine nella posizione iniziale dell'estremo della piattaforma. Il valore di  $V$  si determina usando le equazioni scritte precedentemente, in particolare

$$V = -v_x = \frac{2 \sin 2\alpha}{3 - \cos 2\alpha} v_0$$

### Domanda 3

L'energia disponibile nel centro di massa si conserva, quindi

$$\frac{\mu}{2} v_{rel}^2 = \frac{k}{2} \delta^2$$

dove  $v_{rel} = \dot{x} - \dot{X}$  è la velocità relativa iniziale del blocco rispetto alla piattaforma,  $\mu = m/2$  la massa ridotta del sistema, e  $\delta_{MAX}$  l'allungamento massimo cercato. Risolvendo abbiamo

$$\delta_{MAX} = \sqrt{\frac{\mu}{k}} V = \sqrt{\frac{\mu}{k}} \frac{2 \sin 2\alpha}{3 - \cos 2\alpha} v_0$$

## Soluzione secondo problema

### Domanda 1

Il pistone si abbassa se la forza esercitata inizialmente dal gas sul pistone è minore del suo peso, ossia

$$P_0 S < mg$$

da cui

$$T_0 < \frac{mg}{nRS} V_0$$

### Domanda 2

Dalla conservazione dell'energia, abbiamo che

$$(nc_V + C) T_0 + mg \frac{V_0}{S} = (nc_V + C) T_f + mg \frac{V_f}{S}$$

ma

$$V_f = \frac{nRS}{mg} T_f$$



e quindi

$$T_f = \frac{nc_V + C}{nc_P + C} T_0 + \frac{mgV_0}{S(nc_P + C)}$$

### Domanda 3

L'entropia del sistema è quella del gas perfetto più quella del pistone. A meno di una costante additiva si ha quindi

$$S = (nc_V + C) \log T + nR \log V$$

e si può calcolare direttamente la variazione:

$$\begin{aligned} \Delta S &= (nc_V + C) \log \frac{T_f}{T_0} + nR \log \frac{V_f}{V_0} \\ &= (nc_V + C) \log \left[ \frac{nc_V + C}{nc_P + C} + \frac{mgV_0}{ST_0(nc_P + C)} \right] \\ &+ nR \log \left[ \frac{nc_V + C}{nc_P + C} \left( \frac{nRST_0}{mgV_0} \right) + \frac{nR}{nc_P + C} \right] \end{aligned}$$