

## 1.28. 3 giugno 2015

### Primo problema

Si consideri un biliardo con alcune palle di raggio  $R$  sulla sua superficie. I coefficienti di attrito radente tra palle e piano del biliardo sono  $\mu_s$  e  $\mu_d < \mu_s$ , mentre non sussiste alcun attrito tra due palle quando esse entrano in contatto. In tutto il problema le palle devono essere considerate come corpi rigidi di massa  $m$  che effettuano urti perfettamente elastici. Si supponga inoltre che, al momento di colpire una palla con la stecca, la forza impulsiva applicata alla palla abbia la direzione della stecca.

Nell'intero problema tutte le quantità fisiche date o richieste sono definite nel sistema di riferimento solidale col biliardo.

1. Si consideri un colpo secco dato, a una palla ferma, con la stecca orizzontale e centrale, nel senso che il piano verticale contenente la stecca divida in due semisfere la palla. Determinare a che altezza dal piano deve essere assestato il colpo affinché, immediatamente dopo, la palla rotoli senza strisciare.
2. Si consideri ora un urto centrale, cioè con parametro d'impatto nullo, tra due palle. La prima palla è inizialmente in movimento di puro rotolamento con velocità di traslazione  $v_0$ , mentre la seconda palla è ferma. Dopo l'urto, determinare completamente il moto della palla inizialmente ferma.
3. Nel caso del punto precedente 2., determinare completamente il moto della prima palla, successivamente all'urto.
4. Si consideri ora un urto, tra due palle, con parametro d'urto positivo  $b < 2R$ . La prima palla è inizialmente in movimento di puro rotolamento con velocità di traslazione  $v_0$ , mentre la seconda palla è ferma. Dopo l'urto, determinare completamente il moto della palla inizialmente ferma.
5. Nel caso del punto precedente 4., determinare sia i vettori velocità di traslazione e velocità angolare della prima palla e che le loro derivate rispetto al tempo immediatamente dopo l'urto.
6. Nel caso del punto 4., descrivere qualitativamente la traiettoria della prima palla, successivamente all'urto, e determinarne il raggio di curvatura immediatamente dopo l'urto.

### Secondo problema

Un recipiente cubico di lato  $l = 1\text{m}$ , con pareti trasparenti al calore è diviso in due parti A e B da un setto verticale, anch'esso trasparente al calore, di spessore e capacità termica trascurabile, scorrevole lungo il cubo con attrito trascurabile (si veda la Figura 1.19). Inizialmente la parte A è riempita di acqua fino all'orlo e corrisponde ad una frazione  $f_0 = 1/2$  dell'intero volume, mentre la parte B è riempita da  $n = 0.1$  moli di gas perfetto monoatomico. Il setto è mantenuto in posizione tramite una barretta orizzontale, di massa



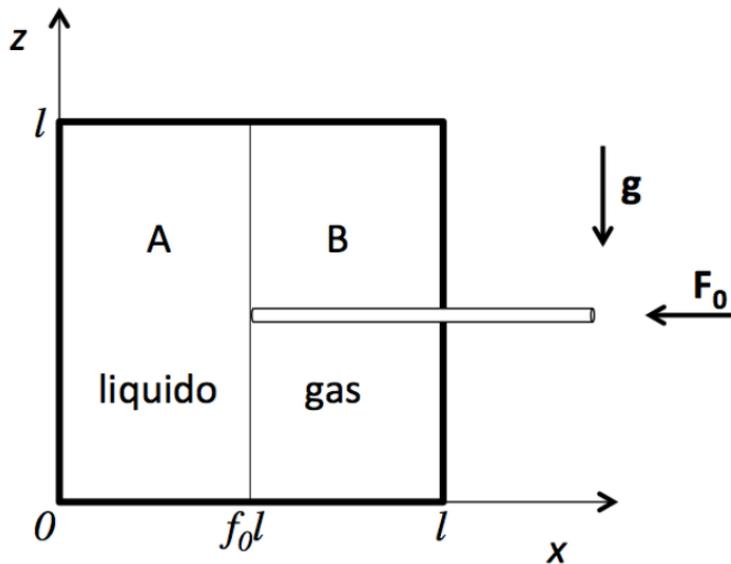


Figura 1.19.: Il sistema considerato nel problema.

e capacità termica trascurabile, sulla quale agisce una forza orizzontale di intensità  $F_0$ . L'esterno si trova ad una temperatura  $T_E = 300\text{K}$ .

1. Determinare l'espressione ed il valore numerico per  $F_0$  ( si assume che  $F_0$  sia il valore minimo necessario a mantenere il setto in equilibrio).
2. Si elimina la forza  $F_0$  e si attende il raggiungimento della posizione di equilibrio. Determinare la nuova frazione di volume  $f_1$  della parte A. Si esprima  $f_1$  in funzione del rapporto  $a$  fra la pressione idrostatica  $\rho g l$  e la pressione del gas  $nRT_E/l^3$ , e si utilizzi lo sviluppo in serie  $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8$ , valido per piccoli  $x$ , per trovare il valore numerico di  $f_1$ , discutendo la validità di tale approssimazione.
3. Determinare il calore  $Q_1$  scambiato con l'esterno in questa trasformazione, specificando se si tratti di calore assorbito o ceduto dal sistema.
4. Si isola termicamente il cubo, lasciando il setto divisorio permeabile al calore e, agendo lentamente sulla barretta in modo da mantenere il sistema sempre in equilibrio, si riporta il setto nella configurazione geometrica iniziale, cioè con la sezione A che occupa una frazione di volume  $f_0$ . Determinare la variazione di entropia in questo processo e la temperatura finale raggiunta dal sistema liquido+gas.

## Soluzione problema 1

### Domanda 1

Sia  $\mathcal{J}$  il modulo dell'impulso (orizzontale) trasmesso alla palla nel punto di altezza  $y$  rispetto al piano del biliardo. Il modulo  $\mathcal{M}$  del momento di tale impulso rispetto al centro di massa  $G$  vale  $\mathcal{M} = \mathcal{J}(y - R)$ . Dette inoltre:

$v$  modulo della velocità di traslazione della palla

$\omega$  modulo della velocità angolare di rotazione della palla

$I = \frac{2}{5}mR^2$  momento d'inerzia della palla rispetto a un asse passante per  $G$

$L$  modulo del momento angolare della palla rispetto a  $G$  affinché si abbia rotolamento puro

deve essere

$$\omega = \frac{v}{R}$$

da cui segue

$$L = I\omega = I \frac{v}{R} = \frac{I\mathcal{J}}{mR}$$

ma anche

$$L = \mathcal{M} = \mathcal{J}(y - R)$$

Abbiamo infine

$$\frac{I\mathcal{J}}{mR} = \mathcal{J}(y - R)$$

e risolvendo per  $y$  troviamo

$$y = R + \frac{I}{mR} = \frac{7}{5}R$$

### Domanda 2

Nel sistema di riferimento del testo, si consideri il sistema di coordinate cartesiane ortogonali avente assi  $x$  e  $z$  giacenti sul piano del biliardo e asse  $y$  verticale, rivolto verso l'alto. L'origine  $O$  coincida con la proiezione ortogonale del centro della prima palla (inizialmente mobile) sul piano del biliardo nel momento in cui le due palle si urtano. Sia  $P$  la proiezione del centro della seconda palla, quando questa è ancora ferma, sul piano del biliardo. L'asse  $x$  abbia la direzione e il verso del vettore  $OP$ , mentre l'asse  $z$  quelli necessari per formare un sistema sinistrorso (standard).

Le coordinate di  $P$  sono  $(2R, 0, 0)$ . Si ha:

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{e}}_x$$

La velocità angolare della prima palla prima dell'urto è:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\omega_0 \hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{v_0}{R} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (1.28.1)$$



Poiché le palle sono lisce, le forze impulsive che si sviluppano tra di esse durante l'urto sono perpendicolari alla loro superficie e quindi giacenti sulla congiungente dei due centri  $G_1$  e  $G_2$ , con la direzione di  $\hat{e}_x$ . Pertanto le velocità di traslazione delle palle immediatamente dopo l'urto hanno solo componente  $x$ .

Poiché le forze impulsive sono solo quelle tra le due palle, la quantità di moto totale di entrambe le palle si conserva durante l'urto:

$$mv_0 = mw_1 + mw_2$$

dove  $w_1$  e  $w_2$  sono, rispettivamente, le componenti  $x$  delle velocità della prima e della seconda palla immediatamente dopo l'urto.

Le forze impulsive lungo la retta  $G_1G_2$  non hanno momento rispetto ai centri delle palle, pertanto i momenti angolari di spin (cioè rispetto ai rispettivi centri) delle due palle si conservano separatamente, così come, di conseguenza, le rispettive velocità angolari.

Infine, la conservazione dell'energia cinetica, garantita dall'elasticità dell'urto, fornisce:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}mw_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}mw_2^2 \quad (1.28.2)$$

Dalla (1.28.1) e dalla (1.28.2) si ricava:

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = v_0$$

Le condizioni iniziali per il moto della seconda palla dopo l'urto sono dunque:

$$\mathbf{r}_2(0) = 2R\hat{e}_x + R\hat{e}_y$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2(0) = v_0\hat{e}_x$$

$$\boldsymbol{\omega}_2(0) = 0$$

dove  $\mathbf{r}_2$  è il vettore posizione di  $G_2$  e  $\boldsymbol{\omega}_2$  la velocità angolare di rotazione della palla (l'angolo di rotazione delle palle è considerato irrilevante, data la loro simmetria).

Poiché il punto della palla a contatto con il piano del biliardo inizialmente striscia su di esso con velocità  $\mathbf{v}_0$ , risente di una forza di attrito radente dinamico costante finché continuerà a strisciare:

$$\mathbf{F}_2 = -\mu_d mg \hat{e}_x$$

il cui momento rispetto a  $G_2$  vale

$$\mathbf{M}_2 = -R\hat{e}_y \wedge \mathbf{F}_2 = -\mu_d mg R \hat{e}_z$$

Dalle due equazioni cardinali della dinamica applicate alla seconda palla:

$$\begin{aligned} -\mu_d mg &= m\ddot{x}_2 \\ -\mu_d mg R &= I\dot{\omega}_{2,z} = \frac{2}{5}mR^2\dot{\omega}_{2,z} \end{aligned}$$

che, risolte con le condizioni iniziali specificate, forniscono:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2 &= \left( -\frac{1}{2}\mu_d g t^2 + v_0 t + 2R \right) \hat{\mathbf{e}}_x + R \hat{\mathbf{e}}_y \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \left( -\frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{R} t \right) \hat{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

oltre all'andamento temporale della velocità di traslazione:

$$\dot{x}_2 = -\mu_d g t + v_0$$

Tali soluzioni, naturalmente, sono valide solo fino al momento  $t = t_2$  in cui la palla smette di strisciare, dopo di che la forza d'attrito si annulla e il moto diventa di puro rotolamento. L'istante a cui questo avviene soddisfa all'equazione di rotolamento puro:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t_2) &= -\omega_{2,z}(t_2)R \\ -\mu_d g t_2 + v_0 &= \frac{5}{2}\mu_d g t_2\end{aligned}$$

da cui

$$t_2 = \frac{2v_0}{7\mu_d g}$$

La successiva velocità di traslazione vale:

$$\dot{x}_2 \hat{\mathbf{e}}_x = (-\mu_d g t_2 + v_0) \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{5}{7}v_0 \hat{\mathbf{e}}_x$$

### Domanda 3

Le condizioni iniziali per il moto della seconda palla dopo l'urto sono state ricavate nel punto precedente:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(0) &= R \hat{\mathbf{e}}_y \\ \dot{\mathbf{r}}_1(0) &= 0 \\ \boldsymbol{\omega}_1(0) &= -\omega_0 \hat{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{r}_1$  è il vettore posizione di  $G_1$  e  $\boldsymbol{\omega}_1$  la velocità angolare di rotazione della palla. Anche in questo caso vi è strisciamento iniziale del punto di contatto con la superficie del biliardo, con forza di attrito radente dinamico:

$$\mathbf{F}_1 = \mu_d m g \hat{\mathbf{e}}_x$$

il cui momento rispetto a  $G_1$  vale

$$\mathbf{M}_1 = -R \hat{\mathbf{e}}_y \wedge \mathbf{F}_1 = \mu_d m g R \hat{\mathbf{e}}_z$$



La soluzione delle relative equazioni cardinali, in modo perfettamente speculare al precedente, fornisce:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{1}{2}\mu_d g t^2 \hat{\mathbf{e}}_x + R \hat{\mathbf{e}}_y \\ \boldsymbol{\omega}_1 &= \left( -\frac{v_0}{R} + \frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{R} t \right) \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

oltre all'andamento temporale della velocità di traslazione:

$$\dot{x}_1 = \mu_d g t$$

Tali soluzioni, naturalmente, sono valide solo fino al momento  $t = t_1$  in cui la palla smette di strisciare, dopo di che la forza d'attrito si annulla e il moto diventa di puro rotolamento. L'istante a cui questo avviene soddisfa all'equazione di rotolamento puro

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t_1) &= -\omega_{1,z}(t_1)R \\ \mu_d g t_1 &= v_0 - \frac{5}{2}\mu_d g t_1 \end{aligned}$$

da cui

$$t_1 = \frac{2v_0}{7\mu_d g} = t_2$$

La successiva velocità di traslazione vale

$$\dot{x}_1 \hat{\mathbf{e}}_x = \mu_d g t_1 \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{2}{7}v_0 \hat{\mathbf{e}}_x$$

#### Domanda 4

Si usi lo stesso sistema di coordinate dei punti precedenti. Sia  $\theta$  l'angolo tra  $\mathbf{v}_0$  e asse  $x$ , si ha:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{b}{2R} \\ \cos \theta &= \sqrt{1 - \left( \frac{b}{2R} \right)^2} \end{aligned}$$

Adesso la velocità iniziale della prima palla si scrive

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_x + v_0 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_z$$

e la sua velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x - \omega_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{v_0}{R} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x - \frac{v_0}{R} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z$$

Le stesse considerazioni sulla direzione delle forze impulsive, la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica portano alle seguenti espressioni per le componenti  $x$  delle velocità immediatamente dopo l'urto:

$$\begin{aligned}w_1 &= \dot{x}_1(0) = 0 \\w_2 &= \dot{x}_2(0) = v_0 \cos \theta\end{aligned}$$

mentre le componenti  $z$  delle stesse velocità, anch'esse come nella domanda 2, hanno gli stessi valori antecedenti all'urto:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(0) &= v_0 \sin \theta \\ \dot{z}_2(0) &= 0\end{aligned}$$

Anche le velocità angolari delle due palle non variano nell'urto:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_1(0) &= \omega_0 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x - \omega_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z \\ \omega_2(0) &= 0\end{aligned}$$

Pertanto, le considerazioni fatte per il moto della seconda palla possono essere ripetute con le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2(0) &= 2R\hat{\mathbf{e}}_x + R\hat{\mathbf{e}}_y \\ \dot{\mathbf{r}}_2(0) &= v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_x \\ \boldsymbol{\omega}_2(0) &= 0\end{aligned}$$

dove l'unica variazione rispetto alla domanda 2 è la sostituzione di  $v_0$  con  $v_0 \cos \theta$ . In conclusione le nuove soluzioni sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2 &= \left( -\frac{1}{2}\mu_d g t^2 + v_0 t \cos \theta + 2R \right) \hat{\mathbf{e}}_x + R\hat{\mathbf{e}}_y \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \left( -\frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{R} t \right) \hat{\mathbf{e}}_z \\ t_2 &= \frac{2 v_0 \cos \theta}{7 \mu_d g}\end{aligned}$$

con velocità di traslazione finale

$$\dot{x}_2 \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{5}{7} v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_x$$

### Domanda 5

I vettori velocità di traslazione e velocità angolare della prima palla immediatamente dopo l'urto sono stati già calcolati al punto precedente:

$$\boldsymbol{\omega}_1(0) = \omega_0 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x - \omega_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z \quad (1.28.3)$$



e

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ \dot{z}_1(0) &= v_0 \sin \theta \end{aligned}$$

dove le seconde possono essere riscritte insieme come:

$$\dot{\mathbf{r}}_1(0) = v_0 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_z \quad (1.28.4)$$

La velocità del punto di contatto della prima palla con il piano del biliardo (cioè con  $O$ , al momento dell'urto  $t = 0$ ), è data dalla formula generale per la velocità di un punto di un corpo rigido:

$$\mathbf{v}_{o'} = \dot{\mathbf{r}}_1(0) + \boldsymbol{\omega}_1(0) \wedge \mathbf{G}_1 \mathbf{O} = v_0 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_z + (\omega_0 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x - \omega_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z) \wedge (-R \hat{\mathbf{e}}_y)$$

da cui

$$\mathbf{v}_{o'} = -v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_x$$

Pertanto, ancora una volta, è presente una forza di attrito radente:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mu_d m g \hat{\mathbf{e}}_x \\ \mathbf{M}_1 &= -R \hat{\mathbf{e}}_y \wedge \mathbf{F}_1 = \mu_d m g R \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

Dalle equazioni cardinali si ricava immediatamente:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1(0) = \frac{\mathbf{F}_1}{m} = \mu_d g \hat{\mathbf{e}}_x \quad (1.28.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1(0) = \frac{\mathbf{M}_1}{I} = \frac{5}{2} \mu_d \frac{g}{R} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (1.28.6)$$

### Domanda 6

Come si vede dal risultato del punto precedente, immediatamente dopo l'urto la prima palla ha una velocità di traslazione lungo l'asse  $z$  e una forza esterna risultante (perpendicolare) lungo l'asse  $x$ . Il risultato sarà una rotazione del vettore velocità verso l'asse  $x$ . Il raggio di curvatura  $r_c$  iniziale si può calcolare direttamente dai valori della velocità (1.28.4) e dell'accelerazione centripeta (1.28.5):

$$r_c = \frac{(\dot{z}_1)^2}{|\ddot{\mathbf{r}}_1|} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{\mu_d g}$$

Contemporaneamente, la componente  $z$  (negativa) della velocità angolare (1.28.3) diminuisce in modulo a causa della derivata (1.28.6). Questo risulta in una rotazione del vettore velocità angolare, anch'esso verso l'asse  $x$ , ma con verso di rotazione opposto a quello della velocità. Il risultato è che l'angolo  $\varphi$  tra velocità di traslazione e velocità angolare di rotazione, superiore a  $\pi/2$  immediatamente dopo l'urto, tende a diminuire.

Il processo prosegue, producendo una traiettoria curva con concavità rivolta verso l'asse  $x$ , mentre l'angolo  $\varphi$  diminuisce fino a  $\pi/2$ , quando la forza d'attrito assume la stessa direzione della velocità, il moto di  $G_1$  diventa rettilineo e finalmente la palla rotola senza strisciare.

## Soluzione problema 2

### Domanda 1

Sul setto agiscono la forza esterna  $F_0$ , la forza dovuta alla pressione del gas e la forza dovuta alla pressione idrostatica del liquido. La forza dovuta al gas è semplicemente

$$F_G^0 = pS = \frac{nRT_E}{(1-f_0)l^3}l^2 = \frac{nRT_E}{(1-f_0)l} \quad (1.28.7)$$

La pressione idrostatica del liquido varia con l'altezza piezometrica  $z$  ( $z$  asse verticale rivolto verso l'alto), ma è la stessa su un elemento di superficie  $dS$  di altezza  $dz$  e larghezza  $l$ . Pertanto, in modulo, si ha:

$$F_L^0 = \int_0^l \rho g l (l-z) dz = \frac{1}{2} \rho g l^3 \quad (1.28.8)$$

Si noti che il risultato non dipende dalla frazione di volume  $f_0$  occupata dal liquido! La condizione di equilibrio ci permette di scrivere  $F_0$  come

$$F_0 = F_L^0 - F_G^0 = \frac{1}{2} \rho g l^3 - \frac{nRT_E}{(1-f_0)l} \simeq 4.5 \text{ kN} \quad (1.28.9)$$

### Domanda 2

Togliendo la forza esterna, il setto si muove verso destra fino a che la parte  $A$  non occupa una frazione  $f_1$  di volume. Il liquido raggiunge una altezza  $h$  e la sua spinta è data da un integrale simile a quello di Eq. (1.28.8)

$$F_L^1 = \int_0^h \rho g (h-z) l dz = \frac{1}{2} \rho g h^2 l \quad (1.28.10)$$

mentre la pressione esercitata dal gas sulla parete è

$$F_G^1 = pS = \frac{nRT_E}{(1-f_1)l^3}l^2 = \frac{nRT_E}{(1-f_1)l}$$

La relazione fra l'altezza  $h$  del liquido e la frazione  $f_1$  è data dalla conservazione del volume del liquido:

$$f_0 l^3 = h f_1 l^2 \rightarrow f_0 l = f_1 h \quad (1.28.11)$$

Quindi la condizione di equilibrio è

$$0 = \frac{1}{2}\rho gh^2 l - \frac{nRT_E}{(1-f_1)l} = \frac{\rho gl^3 f_0^2}{2f_1^2} - \frac{nRT_E}{(1-f_1)l}$$

Scrivendo

$$a = \frac{\rho gl^4}{nRT_E} \simeq 40$$

si ottiene l'equazione di secondo grado in  $f_1$

$$2f_1^2 + af_0^2 f_1 - af_0^2 = 0$$

che ha come unica soluzione accettabile

$$f_1 = \frac{af_0^2}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{8}{af_0^2}} - 1 \right) \simeq 1 - \frac{2}{af_0^2} \simeq 0.8$$

avendo utilizzato l'espansione in serie per  $\sqrt{1+x}$ . In questo caso  $x = 8/(af_0^2) \simeq 0.8$  per cui l'espansione non è pienamente giustificata. In effetti, il calcolo corretto da  $f_1 = 0.854$ .

### Domanda 3

Il sistema gas+liquido non compie lavoro verso l'esterno, per cui il calore ceduto è uguale alla variazione di energia interna. Questa è dovuta solamente alla variazione di energia potenziale del liquido, in quanto la temperatura finale è uguale a quella iniziale, per cui l'energia interna dei due fluidi non varia. Se  $h$  è la nuova quota del liquido, risulta

$$Q_1 = \Delta U = m_L g \frac{h-l}{2} = \rho_L g l^4 f_0 \frac{f_0 - f_1}{2f_1} < 0$$

Il calore è ceduto dal sistema all'ambiente esterno.

### Domanda 4

La trasformazione è adiabatica reversibile, per cui isoentropica

$$\Delta S = 0$$

Fra lo stato iniziale e finale variano sia temperatura che volume del gas, mentre per il liquido cambia solamente la temperatura. Allora:

$$\Delta S = nR \log \frac{V_f}{V_i} + nC_v \log \frac{T_f}{T_i} + mc_L \log \frac{T_f}{T_i} = 0$$

da cui

$$\log \frac{T_f}{T_E} = \frac{nR}{nC_V + \rho_L l^3 f_0 c_L} \log \frac{f_1}{f_0} \simeq e10^{-8}$$



Pertanto risulta  $T_f \simeq T_E$ : l'enorme quantità di liquido (metà cubo, quindi 500l) svolge il compito di serbatoio termico e mantiene la temperatura costante.