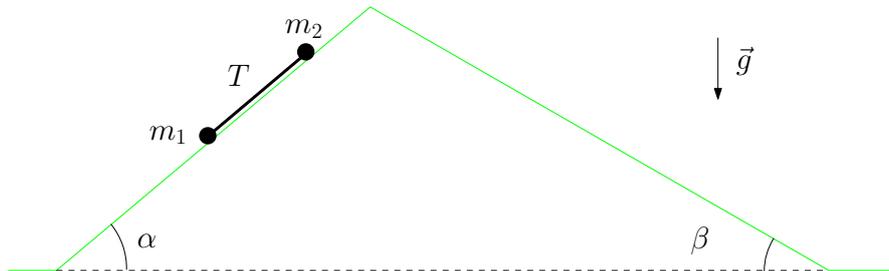


## 4.4. 15 dicembre 2010

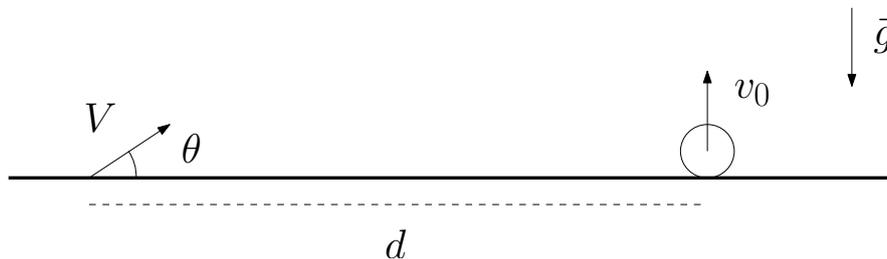
### Problema 1 (15 punti)



Due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$  sono collegati da una fune inestensibile di massa nulla e salgono su un piano inclinato collegato a un altro piano in discesa. I due piani formano con la direzione orizzontale angoli rispettivamente  $\alpha = \pi/4$  e  $\beta = \pi/6$ . Tutte le superfici sono lisce.

1. Scrivere le equazioni del moto per i due corpi.
2. Il primo corpo valica la cima del piano inclinato e ridiscende dall'altra parte. Calcolare le accelerazioni delle due masse.
3. Se la fune è in grado di sostenere una tensione massima  $T_{MAX}$ , per quali valori di  $m_1$  e  $m_2$  questa non si spezza?

### Problema 2 (15 punti)

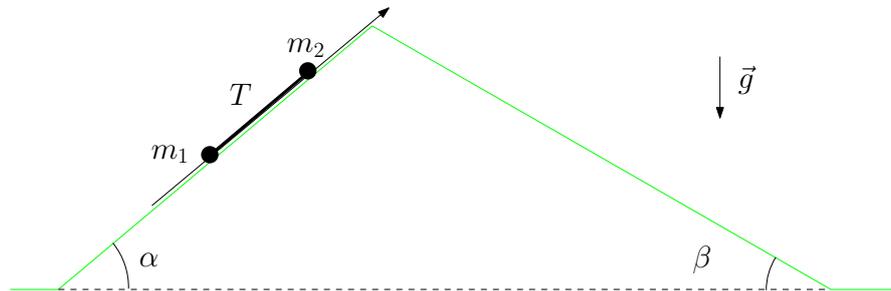


Un piattello viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale  $v_0$ . Un tiratore, che si trova ad una distanza  $d$  dalla posizione del lancio vuole colpirlo con un proiettile che parte dal fucile con velocità iniziale  $V$ .

1. Supponendo che  $V$  sia abbastanza grande, e che il tiratore spari nell'istante in cui il piattello si ferma a mezz'aria, determinare l'angolo di inclinazione del fucile rispetto all'orizzontale.
2. Determinare il minimo valore di  $V$  per cui è possibile colpire il piattello, nelle stesse ipotesi precedenti riguardo l'istante dello sparo.
3. Determinare l'angolo di inclinazione del fucile rispetto all'orizzontale se lo sparo avviene all'istante del lancio, nell'ipotesi che  $V$  sia sufficientemente grande.

## Soluzione primo problema

### Domanda 1



Scegliamo un sistema di riferimento come in figura. Indicando con  $x_1$  e  $x_2$  le coordinate delle due masse abbiamo

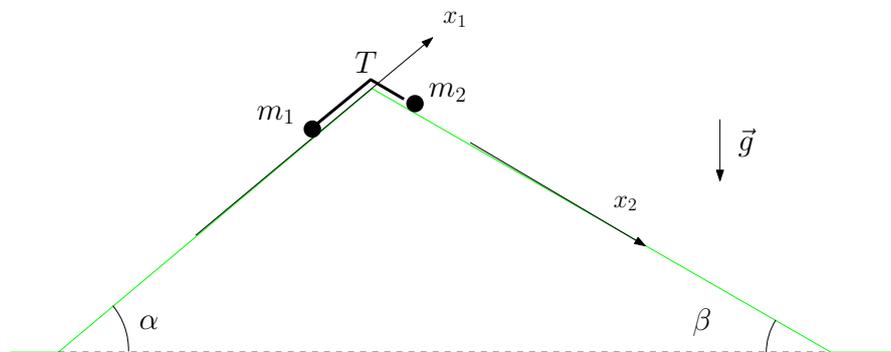
$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -m_1 g \sin \alpha + T \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -m_2 g \sin \alpha - T \end{aligned}$$

e dato che il filo è inestensibile  $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$  sommando membro a membro otteniamo

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = -(m_1 + m_2) g \sin \alpha$$

### Domanda 2

Nella nuova situazione, fissiamo due diversi sistemi di riferimento come in figura. Scriviamo nuovamente le equazioni del moto per le due masse.



Abbiamo

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -m_1 g \sin \alpha + T \\ m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g \sin \beta - T \end{aligned}$$

Anche in questo caso data l'inestensibilità del filo  $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = a$  quindi

$$\begin{aligned} m_1 a &= -m_1 g \sin \alpha + T \\ m_2 a &= m_2 g \sin \beta - T \end{aligned}$$

e sommando membro a membro otteniamo l'accelerazione

$$a = g \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2}$$

che è diretta per ciascuna massa parallelamente al piano di appoggio.

### Domanda 3

Dall'equazione del moto scritta nel primo esercizio otteniamo,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -g \sin \alpha + \frac{1}{m_1} T \\ \ddot{x}_2 &= g \sin \beta - \frac{1}{m_2} T \end{aligned}$$

e sottraendo membro a membro troviamo che  $T = 0$  quando le due masse si trovano sullo stesso piano. Se invece si trovano su piani diversi dalle equazioni del moto scritte nel secondo esercizio abbiamo

$$\begin{aligned} a &= -g \sin \alpha + \frac{1}{m_1} T \\ a &= g \sin \beta - \frac{1}{m_2} T \end{aligned}$$

e sottraendo ancora membro a membro abbiamo

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (\sin \alpha + \sin \beta) < T_{MAX}$$

che è la condizione per non far spezzare la fune. Usando i valori dati degli angoli deve essere

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \right) < T_{MAX}$$

## Soluzione secondo problema

### Domanda 1

Calcoliamo l'altezza  $h$  alla quale si ferma il piattello. Ponendo  $t = 0$  al momento del lancio deve essere

$$v_p(t) = v_0 - gt = 0$$



e

$$y_p(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = h$$

Sostituendo nella seconda equazione il tempo  $t = v_0/g$  ricavato dalla prima abbiamo

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Adesso poniamo  $t = 0$  al momento dello sparo. Le leggi orarie del proiettile si possono scrivere

$$\begin{aligned} X(t) &= V t \cos \theta \\ Y(t) &= V t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

e quelle del piattello

$$\begin{aligned} x_p(t) &= d \\ y_p(t) &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Se questo viene colpito deve essere ad un certo istante  $X(\bar{t}) = x_p(\bar{t})$  e  $Y(\bar{t}) = y_p(\bar{t})$  cioè

$$\begin{aligned} V \bar{t} \cos \theta &= d \\ V \bar{t} \sin \theta - \frac{1}{2} g \bar{t}^2 &= h - \frac{1}{2} g \bar{t}^2 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione troviamo

$$\bar{t} = \frac{d}{V \cos \theta}$$

e sostituendo nella seconda abbiamo

$$\tan \theta = \frac{h}{d} = \frac{v_0^2}{2gd}$$

cioè si deve mirare alla posizione in cui il piattello si ferma.

## Domanda 2

Per colpire il piattello la collisione tra questo e il proiettile deve avvenire a  $y > 0$ . Quindi

$$y_p(\bar{t}) = h - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{V^2 \cos^2 \theta} > 0$$

da cui

$$V^2 > \frac{gd^2}{2h \cos^2 \theta} = \frac{g^2 d^2}{v_0^2} (1 + \tan^2 \theta)$$



cioè

$$V > \frac{v_0}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2gd}{v_0^2}\right)^2}$$

### Domanda 3

In questo caso le leggi orarie si scrivono

$$\begin{aligned} X(t) &= Vt \cos \theta \\ Y(t) &= Vt \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 \\ x_p(t) &= d \\ y_p(t) &= v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

La collisione avviene dopo un tempo

$$\bar{t} = \frac{d}{V \cos \theta}$$

come nel caso precedente, e deve essere

$$V\bar{t} \sin \theta - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = v_0\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2$$

Segue che la velocità verticale del piattello e del proiettile devono essere le stesse

$$V \sin \theta = v_0$$

e quindi

$$\sin \theta = \frac{v_0}{V}$$