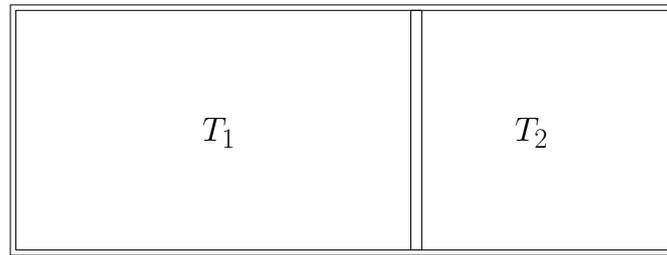


## 7.3. 31 maggio 2010

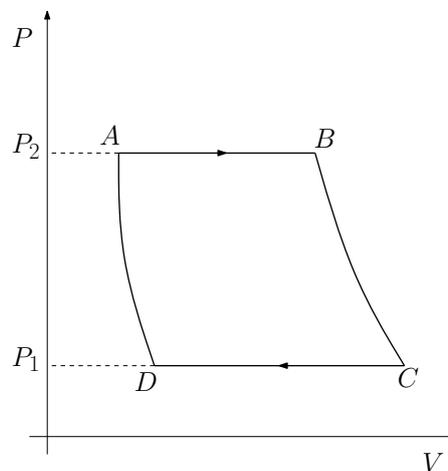
### Problema 1



Il recipiente in figura ha un volume totale  $V$ , ed è impermeabile al calore. Viene diviso in due parti mediante un setto mobile, pure impermeabile al calore. In ogni scomparto si trova una mole dello stesso gas perfetto, ad una temperatura  $T_1$  (a sinistra) e  $T_2$  (a destra).

1. Determinare le pressioni e i volumi dei due scomparti.
2. Si permette il passaggio di calore tra i due scomparti, fino a quando viene raggiunto nuovamente l'equilibrio. Si determini la variazione di entropia del sistema.
3. Impedendo nuovamente il passaggio di calore, si sposta il pistone reversibilmente fino a ottenere i volumi iniziali. Determinare il lavoro fatto sul sistema.

### Problema 2



Una mole di gas perfetto monoatomico viene utilizzata per una trasformazione ciclica reversibile come in figura. Inizialmente si fa espandere il gas ad una pressione costante  $P_2$ , in modo che il rapporto tra volume iniziale e finale sia  $k < 1$ . Segue un'ulteriore espansione adiabatica che porta la pressione a  $P_1 < P_2$ , una compressione a pressione  $P_1$  costante ed una compressione adiabatica che riporta il sistema nello stato iniziale.

1. Rappresentare il ciclo nel piano  $T - S$ , determinando esplicitamente la dipendenza della temperatura dall'entropia per le trasformazioni a pressione costante.
2. Calcolare l'efficienza del ciclo in funzione dei volumi  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_C$  e  $V_D$  o, facoltativamente, in funzione del solo rapporto  $P_1/P_2$ .
3. Come cambia l'efficienza se le trasformazioni adiabatiche avvengono in modo irreversibile, variando bruscamente la pressione esterna da  $P_1$  a  $P_2$  e viceversa (ad esempio appoggiando/togliendo una certa massa sul/dal pistone che chiude il contenitore del gas)?

## Soluzione primo problema

### Domanda 1

L'equilibrio meccanico richiede che i gas siano alla stessa pressione. Possiamo quindi scrivere

$$\frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nRT_2}{V_2} \quad (7.3.1)$$

$$V = V_1 + V_2 \quad (7.3.2)$$

e risolvendo per i volumi otteniamo

$$V_1 = \frac{T_1}{T_1 + T_2} V \quad (7.3.3)$$

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1 + T_2} V \quad (7.3.4)$$

e per la pressione

$$P = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nR}{V} (T_1 + T_2) \quad (7.3.5)$$

### Domanda 2

La trasformazione è irreversibile. Non viene fatto lavoro sul sistema, e neppure viene scambiato calore. Dal primo principio segue quindi  $\Delta U = 0$ . Detta  $T_f$  la temperatura finale abbiamo quindi

$$nc_V T_1 + nc_V T_2 = 2nc_V T_f \quad (7.3.6)$$

e quindi

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (7.3.7)$$

Segue che i volumi finali saranno entrambi  $V/2$ . Per la variazione di entropia abbiamo quindi

$$\Delta S = 2nc_V \ln T_f + 2nR \ln \frac{V}{2} - nc_V \ln T_1 - nc_V \ln T_2 - nR \ln V_1 - nR \ln V_2 \quad (7.3.8)$$

$$= nc_V \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} + nR \ln \frac{V^2}{4V_1 V_2} \quad (7.3.9)$$

$$= nc_V \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} + nR \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} \quad (7.3.10)$$

$$= 2nc_P \ln \left( \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \right) \quad (7.3.11)$$

### Domanda 3

Dato che non viene fornito calore al sistema, il lavoro fatto sarà uguale alla variazione dell'energia interna:

$$L_{ext} = nc_V (T'_1 + T'_2 - 2T_f) \quad (7.3.12)$$

In ciascun scomparto avviene una trasformazione adiabatica, per la quale

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \quad (7.3.13)$$

e quindi

$$T'_1 V_1^{\gamma-1} = T_f \left( \frac{V}{2} \right)^{\gamma-1} \quad (7.3.14)$$

$$T'_2 V_2^{\gamma-1} = T_f \left( \frac{V}{2} \right)^{\gamma-1} \quad (7.3.15)$$

da cui

$$L_{ext} = nc_V T_f \left[ \left( \frac{V}{2V_1} \right)^{\gamma-1} + \left( \frac{V}{2V_2} \right)^{\gamma-1} - 2 \right] \quad (7.3.16)$$

$$= nc_V \frac{T_1 + T_2}{2} \left[ \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_1} \right)^{\gamma-1} + \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \right)^{\gamma-1} - 2 \right] \quad (7.3.17)$$

$$= nc_V \left[ T_1 \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_1} \right)^{\gamma} + T_2 \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \right)^{\gamma} - T_1 - T_2 \right] \quad (7.3.18)$$

## Soluzione secondo problema

### Domanda 1

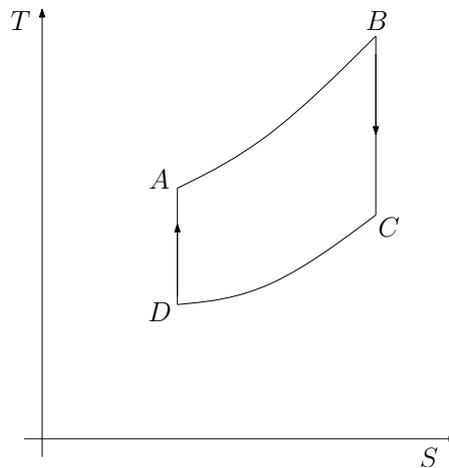
In una trasformazione a pressione costante

$$dS = c_P \frac{dT}{T} \quad (7.3.19)$$

e quindi la temperatura dipende esponenzialmente dall'entropia

$$S - S_0 = c_P \ln \frac{T}{T_0}, \quad T = T_0 e^{(S-S_0)/c_P} \quad (7.3.20)$$

Quindi i cicli si rappresentano come in figura



### Domanda 2

Per il calcolo dell'efficienza possiamo basarci sulla rappresentazione nel piano  $T - S$ . Il calore assorbito sarà

$$\begin{aligned} Q_{ass} &= \int_{S_A}^{S_B} T dS = \int_{S_A}^{S_B} T_A e^{(S-S_A)/c_P} dS \\ &= c_P T_A \left( e^{\Delta S_{BA}/c_P} - 1 \right) \end{aligned} \quad (7.3.21)$$

e il lavoro

$$W = Q_{ass} - Q_{ced} = c_P (T_A - T_D) \left( e^{\Delta S_{CD}/c_P} - 1 \right) \quad (7.3.22)$$

da cui (tenendo conto che  $\Delta S_{CD} = \Delta S_{BA}$ )

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \left( 1 - \frac{T_D}{T_A} \right) \quad (7.3.23)$$

Dato che gli stati  $A$  e  $D$  sono connessi da un'adiabatica reversibile abbiamo

$$P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_A = P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_D \quad (7.3.24)$$

che permette di scrivere l'efficienza in funzione delle pressioni note

$$\eta = 1 - \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (7.3.25)$$

dove  $r = P_1/P_2$ .

### Domanda 3

In questo caso possiamo scrivere per il calore assorbito

$$Q_{ass} = c_P (T_B - T_A) = \frac{c_P}{R} P_2 (V_B - V_A) \quad (7.3.26)$$

e per il lavoro fatto sul sistema

$$\begin{aligned} -L_{ext} &= P_2 (V_B - V_A) + P_1 (V_C - V_B) + P_1 (V_D - V_C) + P_2 (V_A - V_D) \\ &= P_2 (V_B - V_D) + P_1 (V_D - V_B) \\ &= (P_2 - P_1) (V_B - V_D) \end{aligned} \quad (7.3.27)$$

Alternativamente potremmo scrivere anche il lavoro come differenza tra calore assorbito e calore ceduto, dato che l'energia interna non cambia alla fine del ciclo,

$$\begin{aligned} -L_{ext} &= Q_{ass} - Q_{ced} \\ &= c_P (T_B - T_A) + c_P (T_D - T_C) \\ &= \frac{c_P}{R} P_2 (V_B - V_A) + \frac{c_P}{R} P_1 (V_D - V_C) \end{aligned} \quad (7.3.28)$$

Questa espressione è identica alla precedente, infatti sulle due adiabatiche

$$P_1 (V_B - V_C) = c_V (T_C - T_B) = \frac{c_V}{R} (P_1 V_C - P_2 V_B) \quad (7.3.29)$$

$$P_2 (V_D - V_A) = c_V (T_A - T_D) = \frac{c_V}{R} (P_2 V_A - P_1 V_D) \quad (7.3.30)$$

da cui otteniamo

$$\frac{c_P}{R} V_C P_1 = V_B \left( P_1 + \frac{c_V}{R} P_2 \right) \quad (7.3.31)$$

$$\frac{c_P}{R} V_A P_2 = V_D \left( P_2 + \frac{c_V}{R} P_1 \right) \quad (7.3.32)$$

che sostituite nella (7.3.28) danno

$$\begin{aligned}
 -L_{ext} &= \frac{c_P}{R} P_2 V_B - \frac{c_P}{R} P_2 V_A + \frac{c_P}{R} P_1 V_D - \frac{c_P}{R} P_1 V_C \\
 &= \frac{c_P}{R} P_2 V_B - V_D \left( P_2 + \frac{c_V}{R} P_1 \right) + \frac{c_P}{R} P_1 V_D - V_B \left( P_1 + \frac{c_V}{R} P_2 \right) \\
 &= V_B \left( \frac{c_P}{R} P_2 - P_1 - \frac{c_V}{R} P_2 \right) + V_D \left( \frac{c_P}{R} P_1 - P_2 - \frac{c_V}{R} P_1 \right) \\
 &= V_B (P_2 - P_1) + V_D (P_1 - P_2)
 \end{aligned} \tag{7.3.33}$$

L'efficienza è quindi

$$\eta_{irr} = \frac{R}{c_P} (1-r) \frac{V_B - V_D}{V_B - V_A} \tag{7.3.34}$$

oppure

$$\eta_{irr} = 1 - r \frac{(V_C - V_D)}{(V_B - V_A)} \tag{7.3.35}$$

Sostituendo  $V_C$  e  $V_D$  otteniamo

$$\begin{aligned}
 \eta_{irr} &= 1 - \frac{r}{(V_B - V_A)} \left[ \frac{R}{c_P} V_B \left( 1 + \frac{c_V}{R} \frac{P_2}{P_1} \right) - \frac{c_P}{R} \frac{V_A P_2}{\left( P_2 + \frac{c_V}{R} P_1 \right)} \right] \\
 &= 1 - \frac{r}{(1-k)} \left[ \frac{R}{c_P} \left( 1 + \frac{c_V}{rR} \right) - \frac{c_P}{R} \frac{k}{\left( 1 + r \frac{c_V}{R} \right)} \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{(1-k)} \left[ \frac{(\gamma-1)r+1}{\gamma} + \frac{k}{\gamma-1+r} \right]
 \end{aligned} \tag{7.3.36}$$

Notare che  $\eta_{irr} < \eta$  se  $r > 0$  e  $k > 0$ :

$$\eta_{irr} = 1 - \frac{1}{(1-k)} \left[ \frac{(\gamma-1)r+1}{\gamma} + \frac{k}{\gamma-1+r} \right] < 1 - \left[ \frac{(\gamma-1)r+1}{\gamma} \right] < 1 - r \frac{\gamma-1}{\gamma} = \eta \tag{7.3.37}$$