PROBLEMA 2.2

Matrice di rotazione ⋆⋆⋆

Scrivere esplicitamente la matrice $\boldsymbol{R}$ che rappresenta una rotazione di un'angolo θ attorno ad un asse determinato dal versore $\hat{n}$. Questo significa che dato un vettore $\vec{v}$ qualsiasi

$$\vec{v}' = \boldsymbol{R}\vec{v}$$

rappresenta il vettore ruotato. Considerare in particolare i casi $\hat{n} = \hat{x}$, $\hat{n} = \hat{y}$ e $\hat{n} = \hat{z}$.

Soluzione

Cerchiamo di determinare il più generale vettore legato linearmente a $\vec{v}$, tenendo presente che abbiamo a disposizione solo $\hat{n}$ e θ per costruirlo. Esso dovrà perciò essere della forma

$$\vec{v}' = A\left(\hat{n},\theta,\vec{v}\right)\hat{n} + B\left(\hat{n},\theta\right)\vec{v} + C\left(\hat{n},\theta\right)\hat{n}\wedge\vec{v}$$

dove A, B e C dovranno essere degli scalari. Infatti $\vec{v}$ e $\hat{n}\wedge\vec{v}$ sono gli unici due vettori linearmente indipendenti che è possibile costruire, dato che oggetti più generali come $\hat{n}\wedge(\hat{n}\wedge\hat{v})$ e simili si riducono ad essi utilizzando l'identità dimostrata nell'Esercizio (2.1).

Veniamo adesso ai tre scalari. A dovrà essere lineare in $\vec{v}$, e quindi della forma

$$A\left(\hat{n},\theta,\vec{v}\right) = a\left(\theta\right)\hat{n}\cdot\vec{v}$$

mentre dovrà essere $B(\hat{n},\theta) = b\left(\theta\right)$ e $C\left(\hat{n},\theta\right) = c(\theta)$. Di conseguenza

$$\vec{v}' = a\left(\theta\right)\left(\hat{n}\cdot\vec{v}\right)\hat{n} + b\left(\theta\right)\vec{v} + c\left(\theta\right)\hat{n}\wedge\vec{v}$$

Possiamo adesso determinare le funzioni a, b e c considerando alcuni casi particolari.

Anzitutto, se $\vec{v} = \hat{n}$ dovrà essere anche $\vec{v}' = \hat{n}$, dato che la rotazione lascia invariato un vettore allineato con l'asse di rotazione. Sostituendo otteniamo

$$\hat{n} = a\left(\theta\right)\hat{n} + b\left(\theta\right)\hat{n}$$

e quindi $a + b = 1$.

Consideriamo adesso $\hat{n} = \hat{z}$ e $\hat{n} = \hat{x}$. Abbiamo

$$\vec{v}' = b(\theta)\hat{x} + c(\theta)\hat{z}\wedge\hat{x} = b(\theta)\hat{x} + c(\theta)\hat{y}$$

ma sappiamo che se applichiamo una rotazione di un angolo θ attorno all'asse $\hat{z}$ il versore $\hat{x}$ diviene

$$\hat{x} \to \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$$

di conseguenza

$$\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} = b\left(\theta\right)\hat{x} + c\left(\theta\right)\hat{y}$$

e quindi

$$\begin{aligned} b(\theta) &= \cos\theta \\ c(\theta) &= \sin\theta \end{aligned}$$

Il risultato finale è

$$\vec{v}' = [1-\cos\theta]\,(\hat{n}\cdot\vec{v})\,\hat{n} + \cos\theta\vec{v} + \sin\theta\hat{n}\wedge\vec{v}$$

Determiniamo adesso la matrice $\boldsymbol{R}$ che corrisponde a questa trasformazione. Rendendo espliciti gli indici abbiamo

$$v_i' = [\cos\theta\delta_{ik} + (1-\cos\theta)\,n_i n_k]\,v_k + \sin\theta\epsilon_{ijk}n_j v_k$$

dove si sottoindende la somma sulle coppie di indici ripetuti. Di conseguenza

$$R_{ik} = [\cos\theta\delta_{ik} + (1-\cos\theta)\,n_i n_k] + \sin\theta\epsilon_{ijk}n_j$$

ed esplicitamente

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)\,n_x^2 & -\sin\theta\,n_z + (1-\cos\theta)\,n_x n_y & \sin\theta\,n_y + (1-\cos\theta)\,n_x n_z \\ \sin\theta\,n_z + (1-\cos\theta)\,n_z n_y & \cos\theta + (1-\cos\theta)\,n_y^2 & -\sin\theta\,n_x + (1-\cos\theta)\,n_y n_z \\ -\sin\theta\,n_y + (1-\cos\theta)\,n_x n_z & \sin\theta\,n_x + (1-\cos\theta)\,n_y n_z & \cos\theta + (1-\cos\theta)\,n_z^2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo adesso i casi particolari richiesti. Per $\hat{n} = \hat{x}$ vale $n_x = 1$, $n_y = n_z = 0$ e quindi

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Analogamente per $\hat{n} = \hat{y}$ abbiamo $n_y = 1$ e $n_x = n_z = 0$, quindi

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Infine per $\hat{n} = \hat{z}$, da $n_z = 1$ e $n_x = n_y = 0$ segue

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$