PROBLEMA 3.11

## Una traiettoria in coordinate polari ⋆ $\mathcal{S}$

La traiettoria di una particella nel piano è descritta in coordinate polari dall'equazione

$$r = \frac{d}{\cos\theta}$$

dove $d > 0$ è una costante assegnata.

1. Rappresentare graficamente la traiettoria in un piano cartesiano.
2. Determinare il vettore accelerazione in coordinate polari, in funzione di $\theta$, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$.
3. Determinare $r(t)$, sapendo che il vettore velocità è costante ed ha modulo $V$, e che $r(0) = d$.

Può essere utile ricordare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

### Soluzione[2]

**Domanda 1** L'equazione si può porre nella forma

$$d = r\cos\theta = x$$

segue che la traiettoria è una retta verticale a una distanza $d$ dall'origine.

**Domanda 2** Dato che la traiettoria è rettilinea, l'accelerazione vale

$$\vec{a} = \ddot{y}\hat{e}_y$$

Dato che

$$y = r\sin\theta = d\tan\theta$$

troviamo

$$\dot{y} = \frac{d}{\cos^2\theta}\dot{\theta}$$

e

$$\ddot{y} = \frac{d}{\cos^2\theta}\ddot{\theta} + \frac{2d\sin\theta}{\cos^3\theta}\dot{\theta}^2$$

e dato che

$$\hat{e}_y = \hat{e}_r\sin\theta + \hat{e}_\theta\cos\theta$$

troviamo

$$\vec{a} = \frac{d}{\cos^2\theta}\left(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\tan\theta\right)\left(\hat{e}_r\sin\theta + \hat{e}_\theta\cos\theta\right)$$

[2] Primo esercizio scritto Fisica I del 10 settembre 2010

**Domanda 3** Per il vettore velocità abbiamo

$$\vec{v} = \dot{y}\hat{e}_y = \pm V\hat{e}_y$$

Segue immediatamente che

$$\begin{aligned} x &= d \\ y &= y(0) \pm Vt \end{aligned}$$

e quindi

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{d^2 + (y(0) \pm Vt)^2}$$

che imponendo $r(0) = d$ si riduce a

$$r(t) = \sqrt{d^2 + V^2t^2}$$

Alternativamente si può scrivere

$$\frac{d}{\cos^2\theta}\dot{\theta} = V$$

ed integrando

$$d\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = Vt$$

Dato che $r(0) = d$ deve essere $\theta(0) = 0$, e quindi

$$d\tan\theta(t) = Vt$$

ma

$$r = \frac{d}{\cos\theta} = d\sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sqrt{d^2 + V^2t^2}$$