PROBLEMA 3.12

Caduta di una moneta ⋆⋆ $\mathcal{S}$

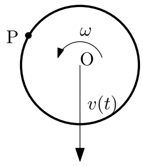

Figura 3.7.: La moneta considerata nel problema. La velocità angolare è indicata con ω, quella del centro di massa (diretta verso il basso e variabile) con $v(t)$.

Il centro di una moneta di raggio R, inizialmente fermo, cade con accelerazione costante $\vec{a} = -g\hat{y}$ verso il basso come in figura. La moneta inoltre ruota con una velocità angolare costante ω.

1. Scrivere il modulo della velocità del punto P posto sul bordo della moneta in funzione del tempo, sapendo che all'istante iniziale questo si trova sulla verticale del centro O, al di sopra di esso.
2. Ad un istante $t > 0$ qualsiasi determinare la posizione di un punto della moneta con velocità nulla, se esiste.
3. Ad un istante $t > 0$ qualsiasi determinare la posizione di un punto della moneta con accelerazione nulla, se esiste.

Soluzione[3]

Domanda 1

Il moto del punto P sarà dato dalla composizione del moto circolare uniforme attorno ad O e di quello uniformemente accelerato di quest'ultimo. Quindi, ponendo la posizione iniziale di O nell'origine di un sistema di coordinate,

$$\begin{aligned} x &= -R\sin\omega t \\ y &= R\cos\omega t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

e derivando

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega\cos\omega t \\ \dot{y} &= -R\omega\sin\omega t - gt \end{aligned}$$

da cui otteniamo il modulo della velocità

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 + g^2t^2 + 2R\omega gt\sin\omega t}$$

[3]Prova scritta 8 febbraio 2012

Domanda 2

Dato che il centro di massa si muove ad un dato istante con una velocità $\vec{v} = -gt\hat{y}$ un punto della moneta potrà essere fermo solo se questa velocità verticale è compensata da quella del suo moto circolare. Questo può accadere solo sul diametro orizzontale della moneta, dove la velocità del moto circolare non ha componenti orizzontali. Inoltre indicando con d la posizione sul diametro relativa ad O di P dovrà essere

$$\omega d - gt = 0$$

e quindi $d = gt/\omega$. Il punto cercato esisterà solo per $d \leq R$, e quindi per $t < \omega R/g$.

Domanda 3

In questo caso è l'accelerazione del moto circolare che deve compensare quella uniforme del centro di massa. Quindi il punto si troverà sul diametro verticale della moneta (dove l'accelerazione centripeta non ha componenti orizzontali) e dovrà essere

$$-\omega^2 d - g = 0$$

dove d è ancora la posizione sul diametro di P relativa ad O. In conclusione

$$d = -\frac{g}{\omega^2}$$

ed il punto cercato esisterà sempre, a condizione che sia $\omega^2 > g/R$.