

PROBLEMA 3.5

Vertici di un poligono ***

N punti materiali sono inizialmente posti nei vertici di un poligono regolare con N lati, a una distanza R del centro. Istante per istante ciascun punto si muove con velocità costante v nella direzione del successivo preso in senso orario. Trovare le traiettorie di ciascun punto.

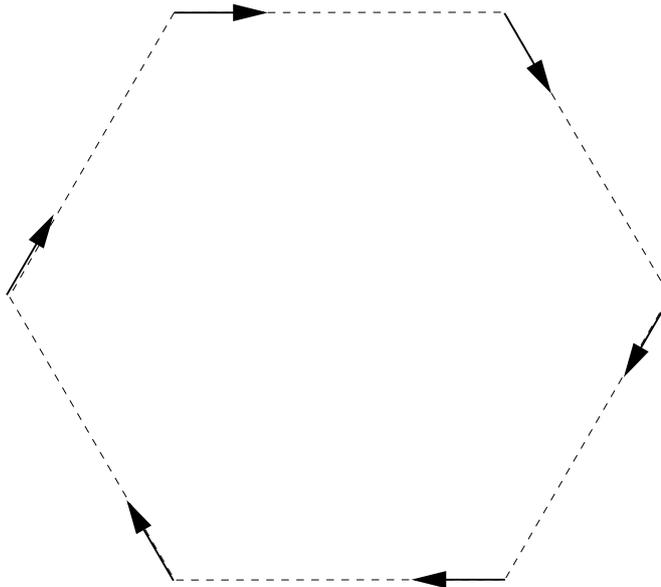


Figura 3.3.: Figura per il problema, nel caso $N = 6$.

Soluzione

Ad ogni istante possiamo scrivere la velocità di un punto nella forma

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

ma per ragioni di simmetria i punti saranno sempre ai vertici di un poligono regolare, ruotato e contratto rispetto al precedente. Allora dovrà essere

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -v \cos \alpha \\ r\dot{\theta} &= v \sin \alpha\end{aligned}$$

dove α è l'angolo tra la velocità e il vettore che unisce il centro del poligono con il vertice considerato,

$$\alpha = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N} \right).$$

Dalle due equazioni otteniamo subito

$$\frac{\dot{r}}{\cos \alpha} + \frac{r\dot{\theta}}{\sin \alpha} = 0$$

ossia

$$\tan \alpha \frac{\dot{r}}{r} = -\dot{\theta}$$

da cui

$$\tan \alpha \frac{d}{dt} \log r = -\frac{d}{dt} \theta$$

e integrando

$$\log r = -\frac{1}{\tan \alpha} \theta + C.$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo infine

$$r = r_0 \exp \left[-\frac{1}{\tan \alpha} (\theta - \theta_0) \right]$$

che descrive una spirale. Notare che questa si restringe verso il centro tanto più lentamente quanto più N è grande. Nel limite il poligono diviene una circonferenza, e ciascun punto si muove su una traiettoria circolare.