PROBLEMA 4.3

Asta vincolata ad una circonferenza ⋆⋆

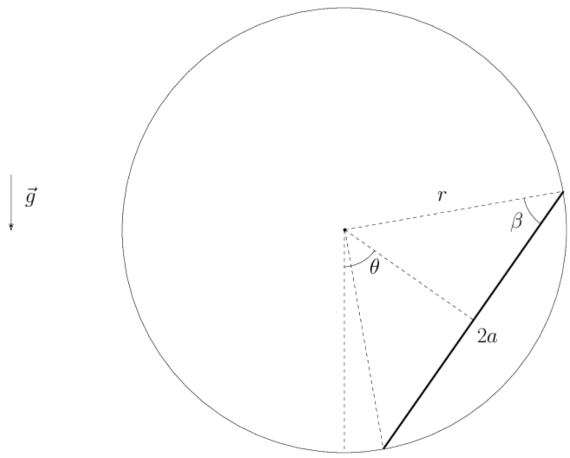

Figura 4.4.: L'asta ha gli estremi appoggiati sulla circonferenza.

Un'asta di lunghezza $2a$ e massa m ha i suoi due estremi appoggiati ad una circonferenza di raggio $r > a$, come in Figura 4.4. Indicando con θ l'angolo tra il segmento che congiunge il punto medio della sbarra al centro della circonferenza, discutere i possibili valori di θ corrispondenti all'equilibrio, tenendo conto della presenza della gravità e di attrito statico tra sbarra e circonferenza descritto da un coefficiente μ.

Soluzione

Scriviamo le condizioni di equilibrio per l'asta, basandoci sullo schema in Figura 4.5. Le forze $\vec{N}_i$ sono le reazioni vincolari, perpendicolari alla supeficie della circonferenza,

$$\vec{N}_i = N_i \hat{n}$$

e $\vec{F}_i$ le forze di atttrito, ad essa tangenti

$$\vec{F}_i = F_i \hat{\tau}$$

Abbiamo indicato con $\hat{n}$ il versore normale alla circonferenza, rivolto verso l'interno, e con $\hat{\tau}$ quello tangente, rivolto in verso antiorario. Per la somma delle forze nella

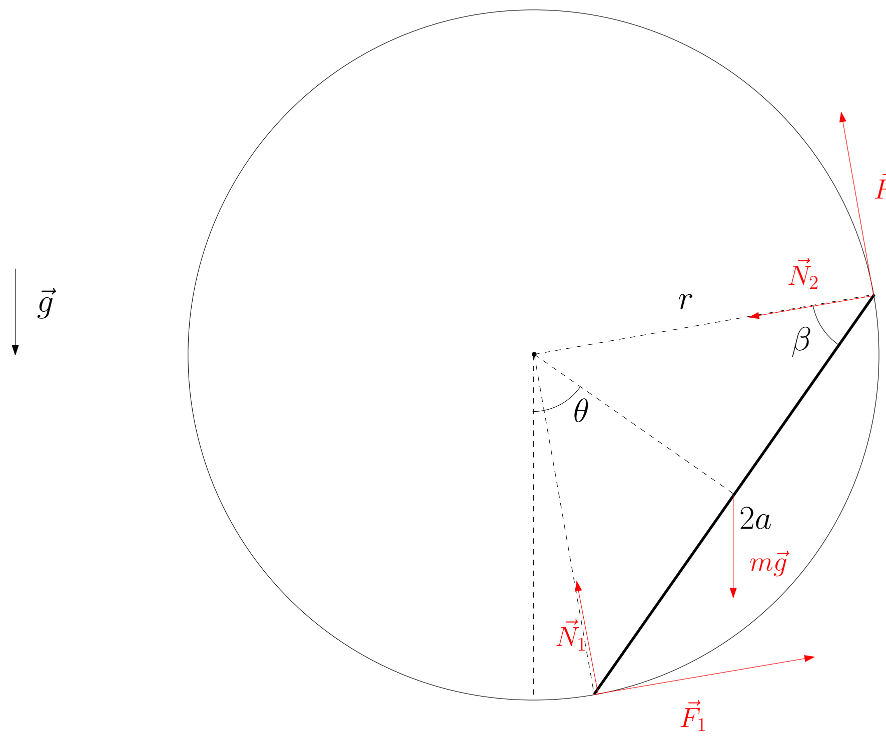

Figura 4.5.: Le forze applicate all'asta.

direzione parallela all'asta abbiamo

$$(N_1 - N_2)\cos\beta + (F_1 + F_2)\sin\beta - mg\sin\theta = 0 \tag{4.3.1}$$

e nella direzione perpendicolare

$$(N_1 + N_2)\sin\beta - (F_1 - F_2)\cos\beta - mg\cos\theta = 0 \tag{4.3.2}$$

Infine per il momento totale rispetto al centro della circonferenza

$$(F_1 + F_2)\, r - mgr\sin\beta\sin\theta = 0 \tag{4.3.3}$$

L'angolo β, indicato nelle figure, è dato da

$$\cos\beta = \frac{a}{r}$$

Deve anzitutto essere

$$N_1 > 0 \tag{4.3.4}$$
$$N_2 > 0 \tag{4.3.5}$$

in caso contrario l'asta si stacca dalla circonferenza. sappiamo inoltre che

$$|F_1| \leq \mu N_1 \tag{4.3.6}$$

$$|F_2| \leq \mu N_2 \tag{4.3.7}$$

Da notare che queste due condizioni sono più restrittive delle (4.3.4) e (4.3.5).

Usando le tre equazioni (4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3) possiamo esprimere F_1 in funzione di N_1 e F_2 in funzione di N_2, per un dato valore di θ. Otteniamo

$$\begin{aligned} F_1 &= N_1 \tan\beta - \frac{1}{2} mg \cos\theta \sec\beta \\ F_2 &= N_2 \tan\beta - \frac{1}{2} mg \cos\theta \sec\beta \end{aligned}$$

Abbiamo inoltre una relazione tra N_1 ed N_2 che scriviamo nella forma

$$\frac{2N_1 \cos\beta}{mg} - \frac{2N_2 \cos\beta}{mg} = 2\cos^2\beta \sin\theta$$

per futura convenienza. Sostituendo nella (4.3.6) e nella (4.3.7) abbiamo

$$\left| N_1 \tan\beta - \frac{1}{2} mg \cos\theta \sec\beta \right| \leq \mu N_1 \tag{4.3.8}$$

$$\left| N_2 \tan\beta - \frac{1}{2} mg \cos\theta \sec\beta \right| \leq \mu N_2 \tag{4.3.9}$$

che sono equivalenti a

$$(\tan\beta - \mu) \frac{2N_i \cos\beta}{mg} \leq \cos\theta \leq (\tan\beta + \mu) \frac{2N_i \cos\beta}{mg} \tag{4.3.10}$$

$$N_i \geq 0 \tag{4.3.11}$$

per $N_i = 1, 2$. Se le disequazioni precedenti hanno soluzioni (tenendo conto del legame tra N_1 ed N_2) allora avremo equilibrio. Conviene discutere graficamente nel piano X_1-X_2, con

$$X_i = \frac{2N_i \cos\beta}{mg}$$

La relazione tra N_1 ed N_2 diviene

$$X_1 - X_2 = 2\cos^2\beta \sin\theta \tag{4.3.12}$$

e le due disequazioni

$$(\tan\beta - \mu) X_i \leq \cos\theta \leq (\tan\beta + \mu) X_i \tag{4.3.13}$$

$$X_i \geq 0 \tag{4.3.14}$$

Dobbiamo distinguere due casi. Se $\mu < \tan\beta$ possiamo scrivere le condizioni precedenti nella forma

$$\frac{\cos\theta}{\tan\beta+\mu} \le X_i \le \frac{\cos\theta}{\tan\beta-\mu}$$
$$X_i \ge 0$$

che possono avere soluzioni solo se $\cos\theta \ge 0$. Rappresentando in Figura 4.6 la regione permessa, vediamo che questa viene intersecata dalla retta corrispondente alla Equazione (4.3.12) per $-\theta^* < \theta < \theta^*$ dove θ^* vale

$$\theta^* = \arctan\left[\frac{\mu}{2\cos^2\beta\left(\tan^2\beta-\mu^2\right)}\right]$$

Notare che in assenza di attrito l'unico valore possibile è $\theta^* = 0$, e che nel limite $\mu \to \tan\beta$ si ha $\theta^* \to \pi/2$ (sbarra verticale).

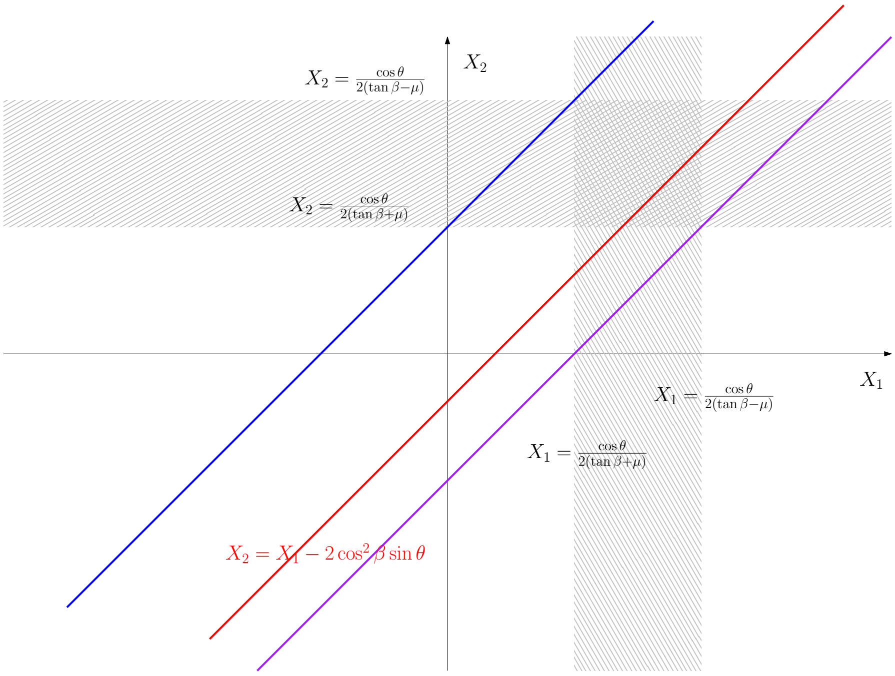

Figura 4.6.: Il caso $\mu < \tan\beta$. I valori estremi di $\sin\theta$ (opposti tra loro) corrispondono alla retta blu e viola.

Se invece$\mu > \tan\beta$ le disequazioni si riducono a

$$\cos\theta \ge 0$$
$$X_i \ge \frac{\cos\theta}{\tan\beta+\mu}$$

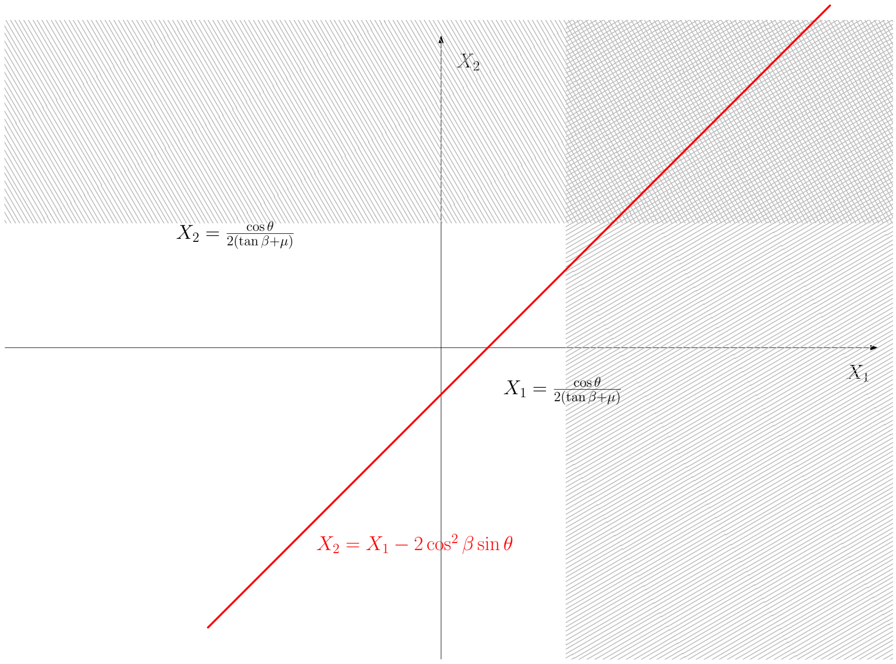

Figura 4.7.: Il caso $\mu > \tan\beta$. Esistono sempre posizioni di equilibrio per $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

e ci troviamo nella situazione rappresentata in Figura 4.7, è sempre possibile cioè trovare una posizione di equilibrio per $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.