PROBLEMA 5.108

## Moto su superficie di rotazione ⋆⋆

Un punto materiale è vincolato a muoversi sotto l'azione della gravità su una superficie liscia, la cui equazione in coordinate cilindriche è $\rho = \alpha z^2$.

1. Determinare le quantità conservate.

2. Studiare l'esistenza di orbite circolari $\rho = r_c$ e determinarne la velocità in funzione di $r_c$.

3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni radiali attorno alle orbite circolari.

### Soluzione[4]

#### Domanda 1

Si conserva la somma di energia cinetica e potenziale gravitazionale, e la componente verticale del momento angolare rispetto ad un polo posto nell'origine (o più in generale sull'asse $z$). Infatti, la reazione vincolare è normale alla superficie e quindi alla velocità del punto materiale, quindi non fa lavoro. Inoltre posta la particella in in punto arbitrario sulla superficie, se consideriamo il piano determinato dal suo vettore posizione rispetto al polo e dall'asse $z$ vediamo che esso contiene anche tutte le forze presenti (reazione vincolare e forza di gravità). Quindi il momento sarà perpendicolare a tale piano, e non potrà avere una componente verticale.

#### Domanda 2

Supponiamo che la particella si muova in un'orbita circolare di raggio $r_c$. Dato che il momento angolare è conservato la velocità angolare è costante. Inoltre avremo, usando coordinate cilindriche $(\rho, \phi, z)$

$$m\ddot{z} = N\cos\theta - mg = 0 \tag{5.108.1}$$

e

$$-mr_c\dot{\phi}^2 = -N\sin\theta \tag{5.108.2}$$

dove $\theta$ è la pendenza della superficie nel punto considerato,

$$\tan\theta = \frac{dz}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{4r_c\alpha}}\,. \tag{5.108.3}$$

Risolvendo otteniamo

$$v = r_c\dot{\phi} = r_c\sqrt{\frac{g}{r_c}\tan\theta} = \left(\frac{g^2 r_c}{4\alpha}\right)^{1/4} \tag{5.108.4}$$

[4]Primo problema scritto 11/9/2008

### Domanda 3

Scriviamo l'energia totale nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + mgz \tag{5.108.5}$$

e il momento angolare lungo $z$:

$$L_z = mr^2\dot{\phi}$$

Possiamo adesso eliminare $\dot{r}$ e tenendo conto del vincolo ($\dot{r} = 2\alpha z\dot{z}$) e $\dot{\phi}$ usando il momento angolare, ottenendo

$$E = \frac{1}{2}m\left(1 + 4\alpha^2 z^2\right)\dot{z}^2 + \frac{L_z^2}{2m\alpha^2 z^4} + mgz \tag{5.108.6}$$

che sviluppiamo per piccole variazioni attorno all'orbita circolare. Questa corrisponde ad un'energia uguale al minimo del potenziale effettivo. Poniamo

$$z = z_c + \varepsilon, \qquad \dot{z} = \dot{\varepsilon} \tag{5.108.7}$$

e sviluppando al secondo ordine abbiamo

$$E - E_0 = \frac{1}{2}m\left(1 + 4\alpha^2 z_c^2\right)\dot{\varepsilon}^2 + \frac{5L_z^2}{m\alpha^2 z_c^6}\varepsilon^2 \tag{5.108.8}$$

che corrisponde all'energia di un oscillatore armonico con

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{10L_z^2}{m^2\alpha^2 z_c^6\left(1 + 4\alpha^2 z_c^2\right)}} = \sqrt{\frac{5g}{(1 + 4\alpha r_c)}}\sqrt{\frac{\alpha}{r_c}} \tag{5.108.9}$$