

PROBLEMA 5.112

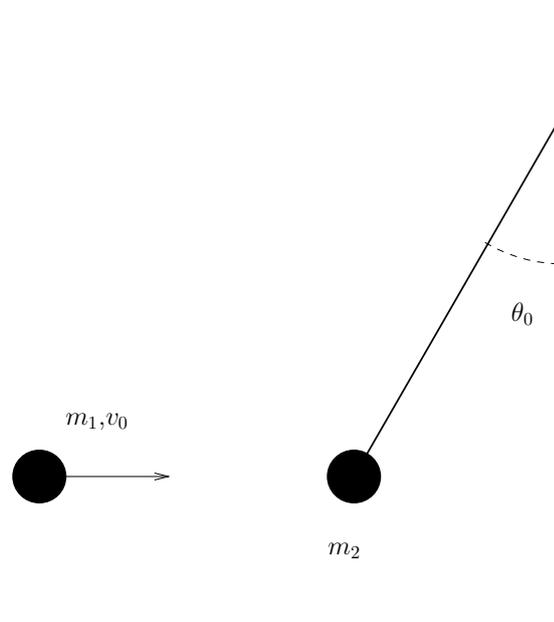
Urto tra una particella e un pendolo **

Figura 5.96.: Il pendolo nella posizione iniziale e la massa che lo urta.

Nel sistema in Figura 5.96 il pendolo costituito dalla massa m_2 e da una bacchetta rigida di massa trascurabile si trova, al momento dell'urto con la massa m_1 , in quiete nella posizione indicata, parametrizzata dall'angolo θ_0 .

1. Supponendo l'urto istantaneo e completamente anelastico, trovare se esistono eventuali quantità conservate durante esso.
2. Trovare l'ampiezza dell'oscillazione del pendolo dopo l'urto se la velocità iniziale della massa m_1 vale v_0 .
3. Per quali valori di θ_0 l'energia dissipata nell'urto è massima e minima?

Soluzione⁸**Domanda 1**

Si conserva il momento angolare rispetto al punto di sospensione del pendolo, dato che l'unica forza esterna applicata al sistema ha braccio nullo rispetto ad esso. Scegliendo

⁸Secondo problema scritto 21/9/2009

coordinate polari possiamo scrivere questa legge di conservazione come

$$m_1 v_0 \ell \cos \theta_0 = (m_1 + m_2) \ell^2 \omega \quad (5.112.1)$$

dove ω è la velocità angolare del pendolo immediatamente dopo l'urto.

Si conserva anche la quantità di moto del sistema lungo la direzione perpendicolare alla bacchetta, dato che non ci sono forze esterne così dirette. La legge di conservazione si scrive

$$m_1 v_0 \cos \theta_0 = (m_1 + m_2) \omega \ell \quad (5.112.2)$$

e quindi è equivalente alla precedente.

Domanda 2 Abbiamo appena calcolato la velocità angolare iniziale del pendolo. Avremo per la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell^2 \omega^2 - (m_1 + m_2) g \ell \cos \theta_0 = - (m_1 + m_2) g \ell \cos \theta_{max} \quad (5.112.3)$$

e quindi

$$\cos \theta_{max} = \cos \theta_0 - \frac{\ell \omega^2}{2g} = \cos \theta_0 - \frac{v_0^2}{2g\ell} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cos^2 \theta_0 \quad (5.112.4)$$

Se la quantità precedente è minore di -1 non si ha una oscillazione ma il pendolo compie delle rotazioni complete.

Domanda 3

L'energia dissipata nell'urto è data dalla differenza delle energie cinetiche,

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell^2 \omega^2 \quad (5.112.5)$$

e quindi

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos^2 \theta_0 \right). \quad (5.112.6)$$

Il valore massimo si ha per $\theta_0 = \pm \pi/2$, nel qual caso tutta l'energia cinetica iniziale è dissipata. Il valore minimo si ha per $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$. In questo caso

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0^2 \quad (5.112.7)$$

che corrisponde all'energia disponibile nel centro di massa.