

PROBLEMA 5.12

Oscillatore armonico forzato **

Un oscillatore armonico si trova in quiete per $t < 0$. Da $t = 0$ a $t = T$ viene applicata una forza costante F . Trovare la legge oraria e studiare il limite $T \rightarrow 0$.

Soluzione

Scriviamo l'equazione del moto dell'oscillatore nella forma

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a(t)$$

dove

$$a(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F/m & 0 \leq t < T \\ 0 & t \geq T. \end{cases}$$

Consideriamo la soluzione nell'intervallo $0 \leq t < T$. Sappiamo che dobbiamo aggiungere alla soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

una soluzione particolare dell'equazione completa. La prima si può scrivere nella forma

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (5.12.1)$$

e si verifica facilmente che una soluzione particolare è la costante $x = \frac{F}{m\omega_0^2}$. Quindi la soluzione completa è della forma

$$x_1(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F}{m\omega_0^2}.$$

Le condizioni da imporre in $t = 0$ sono $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$. Abbiamo da questo

$$x_1(t) = \frac{F}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t). \quad (5.12.2)$$

Costruiamo adesso la soluzione per $t > T$. Adesso l'equazione del moto è omogenea, e dovremo imporre alla soluzione generale di raccordarsi con continuità, insieme alla derivata, con la (5.12.2) in $t = T$. Per semplificare i calcoli possiamo scrivere la soluzione dell'equazione omogenea nella forma

$$x_2(t) = A' \cos \omega_0 (t - T) + B' \sin \omega_0 (t - T).$$

e quindi

$$\begin{aligned} x_2(T) = x_1(T) &= A' = \frac{F}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 T) \\ \dot{x}_2(T) = \dot{x}_1(T) &= \omega_0 B' = \frac{F}{m\omega_0} \sin \omega_0 T \end{aligned}$$

da cui

$$x_2(t) = \frac{F}{m\omega_0^2} [(1 - \cos \omega_0 T) \cos \omega_0 (t - T) + \sin \omega_0 T \sin \omega_0 (t - T)]$$

L'ampiezza dell'oscillazione è data da

$$\mathcal{A} = \frac{2F}{m\omega_0^2} \sqrt{\frac{1 - \cos \omega_0 T}{2}} = \frac{2F}{m\omega_0^2} \left| \sin \frac{\omega_0 T}{2} \right|.$$

Se l'ampiezza della forza è fissata si ha chiaramente

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{A} = 0.$$

Per ottenere un limite finito si deve far variare F con T in modo che

$$\lim_{T \rightarrow 0} F \sin \frac{\omega_0 T}{2}$$

sia finito. Questo significa che $I = FT$ (il prodotto della forza per il tempo di applicazione) deve rimanere costante. In tal caso

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{I}{m\omega_0^2} \left[\frac{1 - \cos \omega_0 T}{T} \cos \omega_0 (t - T) + \frac{\sin \omega_0 T}{T} \sin \omega_0 (t - T) \right] \\ &= \frac{I}{m\omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$