

PROBLEMA 5.141

Molla con massa distribuita III ★★★

La molla con massa distribuita considerata negli Esercizi 5.139 e 5.140 si trova inizialmente appesa in quiete nella configurazione di equilibrio considerata precedentemente. All'improvviso l'estremo superiore si stacca, e la molla cade liberamente sotto l'effetto della accelerazione di gravità. Determinare, facendo uso dei risultati precedenti,

1. La legge oraria del centro di massa della molla.
2. La legge oraria dell'estremo superiore della molla.
3. La legge oraria dell'estremo inferiore della molla.

Soluzione

Si può rispondere immediatamente alla prima domanda: il centro di massa si muoverà con moto uniformemente accelerato verso il basso, con accelerazione g , dato che deve essere

$$M\ddot{y}_{CM} = -Mg$$

In seguito verificheremo direttamente questa affermazione.

Per quanto riguarda il moto degli estremi, proviamo a cercare una soluzione per la caduta della molla nella forma vista nell'Esercizio 5.140, ossia

$$y(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt) + \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.141.1)$$

Per il seguito risulta conveniente scrivere

$$y(x, t) = x + u(x, t)$$

da cui

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x - vt) + G(x + vt) - x + \frac{1}{2}gt^2 \\ &= A(x - vt) + B(x + vt) + \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad (5.141.2)$$

con

$$\begin{aligned} A(x) &= F(x) - \frac{x}{2} \\ B(x) &= G(x) - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Dobbiamo imporre che a $A(x)$ – la soluzione coincida con la configurazione di equilibrio determinata nell'Esercizio 5.139, ossia

$$u(x, 0) = A(x) + B(x) = \frac{Mg}{KL_0^2} \left(L_0x - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{gL_0}{v^2} \left(x - \frac{x^2}{2L_0} \right)$$

per $0 < x < L$. Inoltre nell'istante immediatamente successivo al distacco la molla sarà ferma, quindi sempre per $0 < x < L$ dovremo avere

$$\dot{u}(x, 0) = v [A'(x) - B'(x)] = 0$$

e quindi le funzioni A e B potranno differire solo per una costante, $B(x) = A(x) + C$. Sostituendo nell'equazione precedente avremo

$$A(x) = \frac{gL_0}{2v^2} \left(x - \frac{x^2}{2L_0} \right) - \frac{C}{2}$$

$$B(x) = \frac{gL_0}{2v^2} \left(x - \frac{x^2}{2L_0} \right) + \frac{C}{2}$$

e confrontando con la (5.141.1) vediamo che la costante è irrilevante, per cui porremo $C = 0$.

Se consideriamo adesso la struttura della soluzione (5.141.2), vediamo che, a parte il termine $gt^2/2$, la funzione $u(x, t)$ può essere interpretata come la somma di una funzione $A(x - vt)$ che si trasla rigidamente con velocità v che è una funzione $B(x + vt)$ che fa lo stesso con velocità $-v$. Con le considerazioni precedenti abbiamo determinato $A(x)$ e $B(x)$ nell'intervallo $0 < x < L_0$, ma non sappiamo ancora niente sulla loro forma per $x > L_0$ e $x < 0$.

Sappiamo però che la tensione all'estremo $x = L_0$ è nulla. Come abbiamo visto negli esercizi precedenti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{KL_0} T$$

e quindi dovrà essere

$$\frac{\partial u(L_0, t)}{\partial x} = A'(L_0 - vt) + B'(L_0 + vt) = 0$$

Dopo il distacco anche la tensione in $x = 0$ si dovrà annullare, e quindi per $t > 0$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = A'(-vt) + B'(vt) = 0$$

Segue che

$$A'(x) = -B'(2L_0 - x)$$

$$A'(x) = -B'(-x)$$

Integrando otteniamo

$$A(x) = B(2L_0 - x)$$

$$A(x) = B(-x)$$

a meno di costanti che dobbiamo considerare nulle se vogliamo che $y(x, t)$ sia continua.

Queste relazioni permettono di determinare la forma di A e B al di fuori dell'intervallo $0 < x < L_0$. Infatti vediamo che riflettendo $B(x)$ rispetto $x = 0$ si deve ottenere $A(x)$. Lo stesso deve accadere per una riflessione rispetto $x = L_0$.

La conclusione è che sia $A(x)$ che $B(x)$ sono funzioni periodiche con periodo $2L_0$, e che possiamo scrivere

$$A(x) = B(x) = \frac{gL_0}{2v^2} \left(\gamma(x) - \frac{\gamma(x)^2}{2L_0} \right) \quad (5.141.3)$$

con

$$\gamma(x) = 2L_0 \left\lfloor \frac{x}{2L_0} \right\rfloor$$

e $\lfloor x \rfloor$ è il più grande intero minore di x (vedere Figura (5.117)).

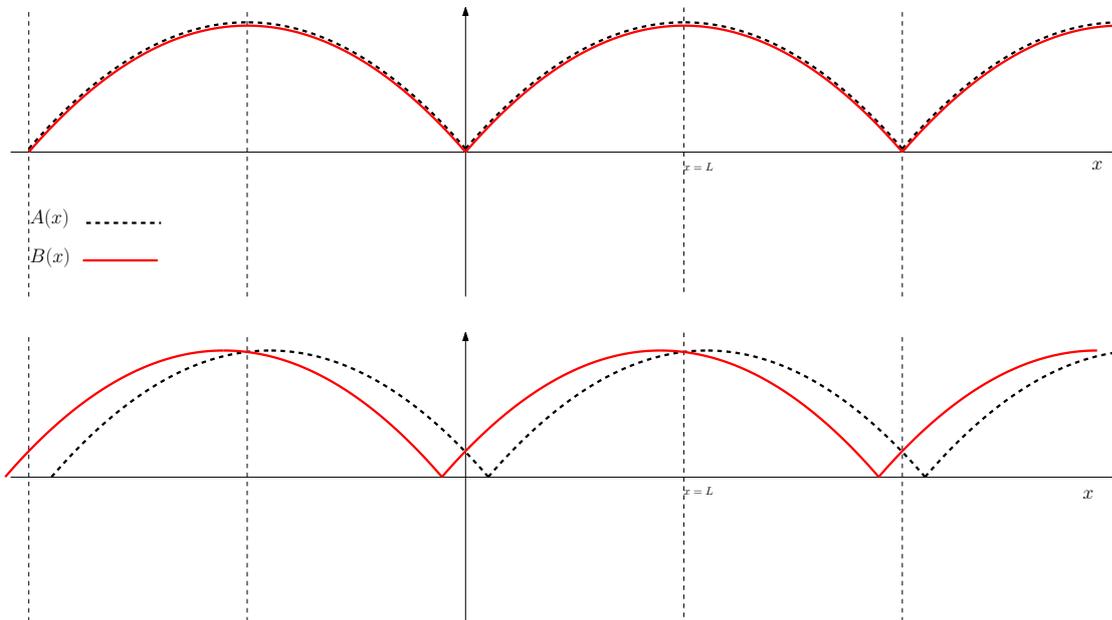


Figura 5.117.: Le funzioni $A(x)$ (linea nera tratteggiata) e $B(x)$ (linea rossa continua) sono rappresentate in alto. La funzione $u(x, t)$ Plain Layout meno del termine $gt^2/2$ alla somma di $A(x - vt)$ e di $B(x + vt)$, cioè delle funzioni traslate rigidamente verso destra e verso sinistra di vt (figura in basso).

Possiamo adesso determinare facilmente il moto di un punto generico della molla, ottenendo

$$y(x, t) = x + \frac{gL_0}{2v^2} \left[\gamma(x - vt) + \gamma(x + vt) - \frac{\gamma(x - vt)^2 + \gamma(x + vt)^2}{2L_0} \right] + \frac{1}{2}gt^2$$

Notiamo che $y(x, t)$ è continua, ma la sua derivata $\partial y / \partial x$ ha una discontinuità. Questa discontinuità si genera al momento del distacco, quando la tensione all'estremo superiore cambia bruscamente, $\Delta T = -Mg$. Dalla Figura 5.117 è evidente che tale discontinuità

si propagherà inizialmente dall'estremo inferiore a quello superiore con velocità

$$v_D = \lim_{x \rightarrow vt} \left(\frac{\partial y}{\partial x} v + \frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

Ad ogni arrivo ad un estremo verrà riflessa e invertirà il suo moto. Notare che mentre $\partial y / \partial x$ deve avere una discontinuità, il limite precedente deve esistere: quindi anche $\partial y / \partial t$ deve avere una discontinuità e deve valere²²

$$\Delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = -v \Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad \Delta f \equiv \lim_{x \rightarrow vt^+} f - \lim_{x \rightarrow vt^-} f$$

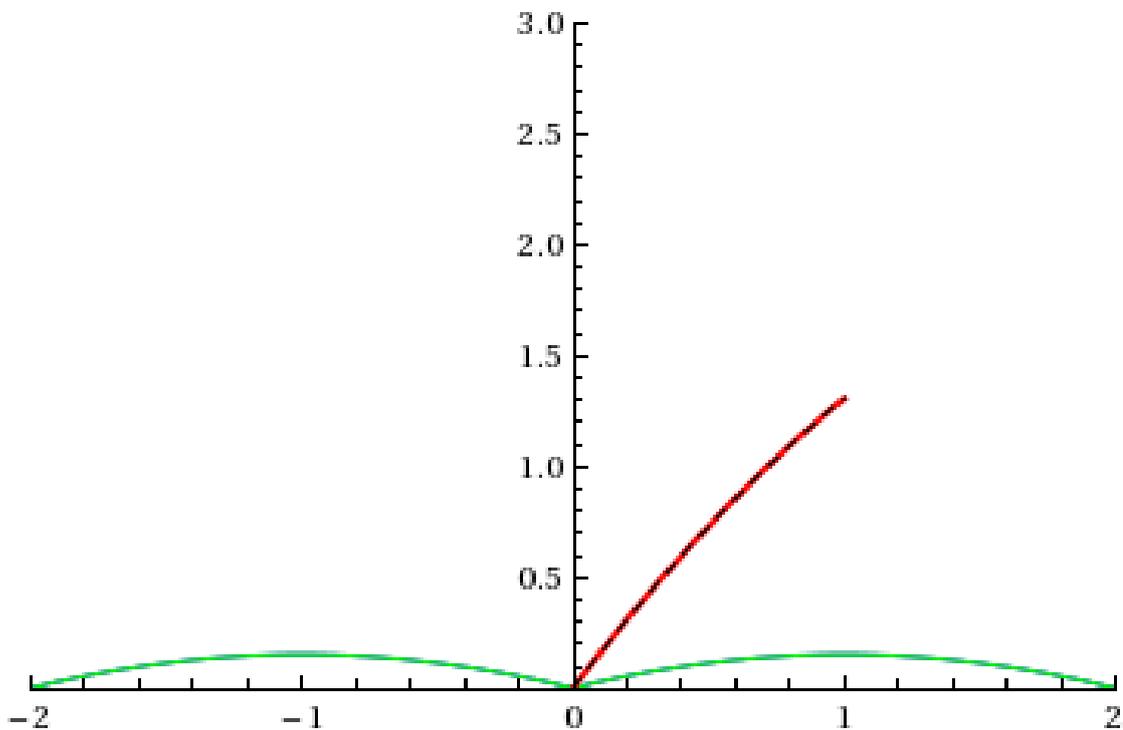


Figura 5.118.: La funzione $y(x, t)$ (in rosso) nell'intervallo $0 < t < 2L_0/v$. Per confronto sono riportate anche le funzioni $A(x - vt)$ (in blu), $B(x + vt)$ (in verde) e $y(x, 0)$ (tratteggiata). Si è preso $L_0 = 1\text{m}$ e $v = 4\text{ms}^{-1}$, quindi $2L_0/v = 0.5\text{s}$. L'animazione è disponibile all'indirizzo <http://www.df.unipi.it/~cella/videos/ueg/T2.html>

Notiamo inoltre che la funzione $y(x, t) - gt^2/2$ si può interpretare come la configurazione della molla vista in un sistema di riferimento solidale al centro di massa (cioè,

²²Verificatelo esplicitamente, usando i risultati che seguono.

in moto uniformemente accelerato con accelerazione g), e che si ripete periodicamente per $t > 0$ con periodo $2L_0/v$. Studiamo quindi $y(x, t)$ a partire da $t_m = 2mL_0/v$ con $m \in \{0, 1, \dots\}$. Ponendo $t = t_m + \tau$ possiamo distinguere due fasi:

1. $0 < v\tau < L_0$. La discontinuità nella derivata si muove da sinistra verso destra, e si trova in $x_D = v\tau$. Possiamo scrivere per $0 < x < x_D$

$$\begin{aligned} y(x, t) &= x + \frac{gL_0}{v^2} \left[x + L_0 - \frac{(x + 2L_0 - v\tau)^2 + (x + v\tau)^2}{4L_0} \right] + \frac{g}{2} \left(\frac{2mL_0}{v} + \tau \right)^2 \\ &= y(x, 0) + \frac{gL_0}{v^2} (v\tau - x) + \frac{2gmL_0}{v} \left(\tau + \frac{mL_0}{v} \right) \end{aligned}$$

e per $x_D < x < L_0$

$$y(x, t) = y(x, 0) + \frac{2gmL_0}{v} \left(\tau + \frac{mL_0}{v} \right)$$

Notare che tutti i punti della molla in $x < x_D$ si stanno muovendo con la stessa velocità costante

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{gL_0}{v} (1 + 2m)$$

e quelli con $x > x_D$ con

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{gL_0}{v} (2m)$$

2. $L_0 < v\tau < 2L_0$. La discontinuità nella derivata si muove da destra verso sinistra, e si trova in $x_D = 2L_0 - v\tau$. Possiamo scrivere per $0 < x < x_D$

$$y(x, t) = y(x, 0) + \frac{gL_0}{v^2} (v\tau - x) + \frac{2gmL_0}{v} \left(\tau + \frac{mL_0}{v} \right)$$

e per $x_D < x < L_0$

$$y(x, t) = y(x, 0) + \frac{2gL_0}{v^2} (v\tau - L_0) + \frac{2gmL_0}{v} \left(\tau + \frac{mL_0}{v} \right)$$

Questa volta i punti con $x < x_D$ si muovono con la velocità costante

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{gL_0}{v} (1 + 2m)$$

e quelli con $x > x_D$ con

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{gL_0}{v} (2 + 2m)$$

Possiamo in conclusione descrivere il moto in questi termini: inizialmente la molla è ferma. Come descritto in precedenza, la discontinuità in $\partial y/\partial x$ inizia a muoversi

dall'estremo che si è staccato, e si sposta continuamente da un capo all'altro. Possiamo adesso calcolare esplicitamente la sua velocità.

Al passaggio della discontinuità un punto della molla incrementa istantaneamente la sua velocità di

$$\Delta V = \frac{gL_0}{v}$$

L'evoluzione è rappresentata nella animazione 5.118 tra $t = 0$ e $t = 2L_0/v$, intervallo corrispondente ai primi due "passaggi" della discontinuità ($m = 0$ nelle formule precedenti). Notare in particolare che l'estremo inferiore della molla rimane immobile fino al sopraggiungere di questa. In conclusione le estremità della molla si muoveranno con velocità costante: solo al momento dell'arrivo della discontinuità la loro velocità aumenterà improvvisamente di ΔV .

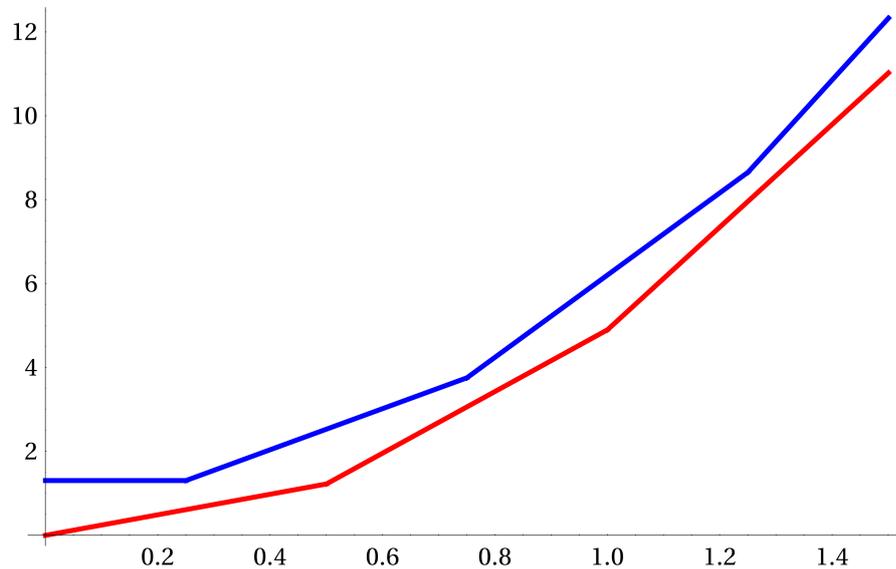


Figura 5.119.: Le leggi orarie dell'estremo superiore (in rosso) e dell'estremo inferiore (in blu) della molla. Sull'asse delle ascisse è riportato il tempo in secondi, sull'asse delle ordinate y in metri. Si è preso $L_0 = 1\text{m}$ e $v = 4\text{ms}^{-1}$. La discontinuità in $\partial y/\partial x$ passa quindi dall'estremo superiore in $t_m = 2mL_0/v = 0.0\text{s}, 0.5\text{s}, \dots$ ed in quello inferiore in $t_m = (2m+1)L_0/v = 0.25\text{s}, 0.75\text{s}, \dots$.

Calcoliamo infine esplicitamente il moto del centro di massa, limitandoci a $0 < t < L_0/v$. Dato che

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{\mu}{M} \int_0^{L_0} y dx$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{L_0} \int_0^{vt} \left[y(x,0) + \frac{gL_0}{v^2} (vt - x) \right] dx \\
&+ \frac{1}{L_0} \int_{vt}^{L_0} y(x,0) dx \\
&= \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \left[x + \frac{gL_0}{2v^2} \left(2x - \frac{x^2}{L_0} \right) \right] dx \\
&+ \frac{g}{v^2} \int_0^{vt} (vt - x) dx \\
&= \left(1 + \frac{2gL_0}{3v^2} \right) \frac{L_0}{2} + \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}$$

Questo conferma quanto detto inizialmente. Un calcolo analogo darebbe lo stesso risultato per $t > 0$ qualsiasi. Molto più semplicemente, sappiamo che le masse a sinistra e a destra della discontinuità si muovono con velocità costante. Considerando ad esempio la fase 1 vista precedentemente possiamo scrivere

$$v_{CM} = \frac{vt}{L_0} \frac{gL_0}{v} (1 + 2m) + \left(1 - \frac{vt}{L_0} \right) \frac{gL_0}{v} 2m$$

da cui

$$a_{CM} = g$$

ed analogamente nella fase 2.

Concludiamo osservando che il modello considerato ha delle limitazioni. Se calcoliamo infatti la quantità $\partial y / \partial x$ troviamo, con la notazione usata in precedenza,

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \begin{cases} 1 - \frac{gx}{v^2} & 0 < x < x_D \\ 1 + \frac{gL_0}{v^2} \left(1 - \frac{x}{L_0} \right) & x_D < x < L_0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che se

$$\frac{gL_0}{v^2} > 1$$

in qualche punto della molla si avrà

$$\frac{\partial y}{\partial x} < 0$$

Questo significa che y non è una funzione crescente di x : in altre parole durante l'evoluzione un punto della molla può superare quelli successivi. I parametri della animazione 5.118 sono stati scelti in modo che questo non accada, ma con altre scelte il fenomeno avviene (vedere l'animazione 5.120), ed è chiaramente non realistico.

Per risolvere il problema si deve complicare il modello, ad esempio modificando la legge di Hooke imposta nell'Equazione in modo da impedire la compressione. Per un possibile approccio vedere[1]. Un esempio "dal vivo" di un sistema di questo tipo si trova all'indirizzo <http://www.youtube.com/watch?v=uiyMuHuCFo4>.

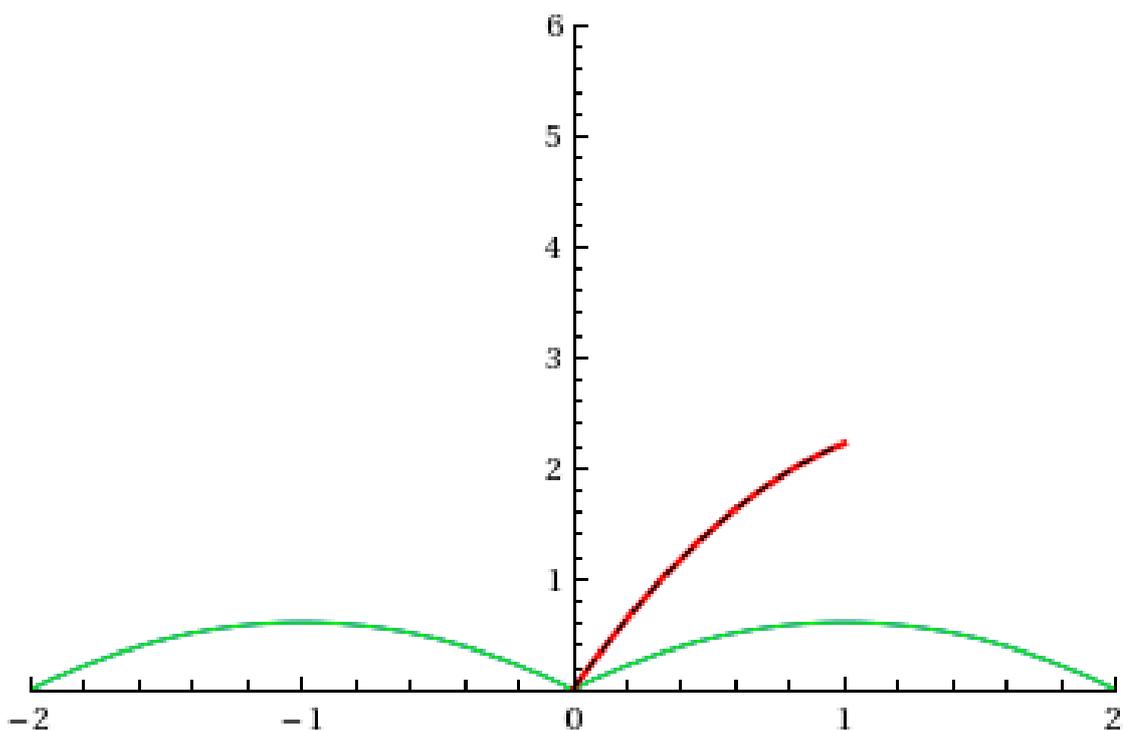


Figura 5.120.: La funzione $y(x, t)$ (in rosso) nell'intervallo $0 < t < 2L_0/v$. Per confronto sono riportate anche le funzioni $A(x - vt)$ (in blu), $B(x + vt)$ (in verde) e $y(x, 0)$ (tratteggiata). Si è preso $L_0 = 1\text{m}$ e $v = 2\text{ms}^{-1}$, quindi $2L_0/v = 1\text{s}$. Notare che in questo caso alcuni punti della molla superano i successivi nel corso dell'evoluzione. L'animazione è disponibile all'indirizzo <http://www.df.unipi.it/~cella/videos/ueg/T3.html>

Bibliografia

- [1] R. C. Cross and M. S. Wheatland, *Modeling a falling slinky*. Am. J. of Phys. 80, 12 (2012), 1051.