

PROBLEMA 5.19

Oscillatore e forza $F = \alpha t^2$ **

Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica k) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t^2$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0$ in modo tale che la massa si muova di moto uniformemente accelerato? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto.

Soluzione

Se il moto della massa è uniformemente accelerato la forza totale su di essa deve essere costante, ed uguale al prodotto di massa per accelerazione. Scriviamo l'equazione del moto:

$$m\ddot{x} + kx = \alpha t^2$$

e cerchiamo una soluzione del tipo

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Sostituendo otteniamo

$$ma + kx_0 + kv_0 t + \frac{1}{2} kat^2 = \alpha t^2$$

che è soddisfatta prendendo

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ a &= \frac{2\alpha}{k} \\ x_0 &= -\frac{2m\alpha}{k^2}. \end{aligned}$$

La soluzione generale si ottiene aggiungendo alla soluzione particolare appena determinata una arbitraria oscillazione libera (soluzione generale dell'equazione omogenea):

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \frac{2m\alpha}{k^2} + \frac{\alpha}{k} t^2.$$