

PROBLEMA 5.33

Sbarra vincolata **

L'asta rappresentata in Figura 5.26, di massa m e lunghezza ℓ , ha un estremo vincolato a muoversi su una guida verticale e l'altro su una guida orizzontale. Inizialmente θ è molto piccolo. Determinare il punto della sbarra che raggiunge la massima velocità v_{max} nella caduta (da $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$), e calcolare v_{max} .

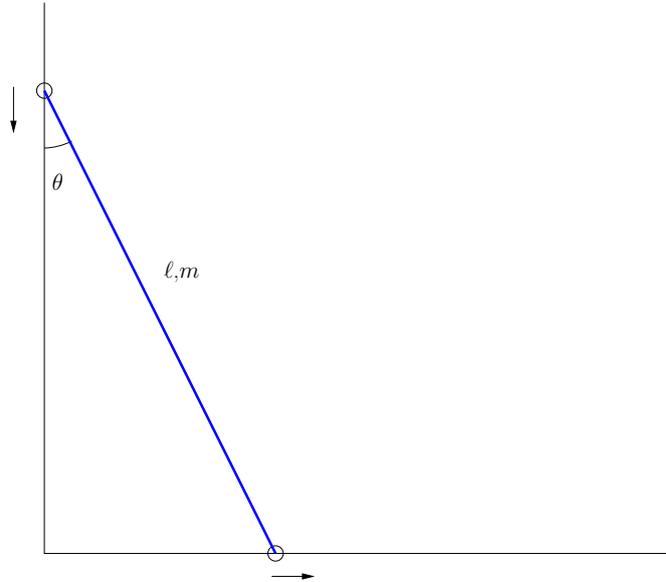


Figura 5.26.: La sbarra vincolata in una configurazione intermedia tra quella iniziale e quella finale.

Soluzione

Dato l'angolo θ possiamo scrivere la posizione di un tratto infinitesimo sulla sbarra posto a una distanza r fissata dal giunto verticale come

$$\vec{r} = \ell \cos \theta \hat{e}_y + r \hat{e}_r$$

dove $0 \leq r \leq \ell$. La velocità sarà data da

$$\vec{v} = -\ell \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_y + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

ed il suo modulo quadro

$$v^2 = \dot{\theta}^2 [r^2 + \ell(\ell - 2r) \sin^2 \theta]$$

Notare che la coordinata r non è stata derivata. Possiamo ora scrivere l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2} \int v^2(r) dm = \frac{1}{2} \frac{m}{\ell} \int_0^\ell (r^2 \dot{\theta}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2\ell r \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) dr$$

ossia

$$T = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

Per l'energia potenziale abbiamo

$$U = mg \frac{\ell}{2} \cos \theta$$

che poteva ottenersi direttamente usando la posizione del centro di massa. Usando la conservazione dell'energia troviamo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{\ell} (1 - \cos \theta)$$

Per un fissato valore di θ il punto più veloce dell'asta corrisponde al massimo di v^2 rispetto a r in $0 \leq r \leq \ell$, cioè $r = \ell$ se $\theta < \pi/4$ e se $\theta > \pi/4$. La relativa velocità vale

$$\begin{aligned} v^2 &= \ell^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta = 3g\ell(1 - \cos \theta) \cos^2 \theta & \theta < \pi/4 \\ v^2 &= \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = 3g\ell(1 - \cos \theta)^2 (1 + \cos \theta) & \theta > \pi/4. \end{aligned}$$

Il massimo assoluto di questa espressione si ha per $\theta = \pi/2$, quindi

$$\begin{aligned} r_{max} &= 0 \\ v_{max}^2 &= 3g\ell \end{aligned}$$

cioè il giunto fissato sulla guida verticale si muove più velocemente di ogni altro punto, e questo avviene quando la sbarra è verticale.