PROBLEMA 5.36

Oscillatore forzato con attrito ⋆⋆⋆

Un oscillatore forzato è descritto dall'equazione

$$m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx = F(t)$$

dove λ parametrizza l'attrito viscoso presente e $F(t)$ é un'onda quadra di ampiezza F_0 e periodo T:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & kT < t \le \left(k+\frac{1}{2}\right)T \\ -F_0 & \left(k+\frac{1}{2}\right)T < t \le (k+1)T \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Trovare se possibile una soluzione $x(t)$ periodica in $-\infty < t < \infty$ e discuterne l'unicità.

Soluzione

Determiniamo la soluzione generale nel periodo dell'onda quadra corrispondente a $k = 0$. Tra $t = 0$ e $t = T/2$ l'equazione si riduce a

$$m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx = F_0$$

che ammette come soluzione generale

$$x_0(t) = A_0 e^{\alpha t} + A_0^* e^{\alpha^* t} + \frac{F_0}{k}$$

dove α, α^* sono le soluzioni complesse coniugate di

$$m\alpha^2 + 2\lambda\alpha + k = 0\,.$$

Analogamente tra $t = T/2$ e $t = T$ l'equazione diviene

$$m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx = -F_0$$

con soluzione che scriviamo nella forma

$$x_0'(t) = B_0 e^{\alpha(t-T/2)} + B_0^* e^{\alpha^*(t-T/2)} - \frac{F_0}{k}\,.$$

Dobbiamo imporre la continuità della soluzione e della sua derivata in $t = T/2$. Abbiamo un sistema lineare

$$\begin{aligned} A_0 e^{\alpha T/2} + A_0^* e^{\alpha^* T/2} + \frac{F_0}{k} &= B_0 + B_0^* - \frac{F_0}{k} \\ \alpha A_0 e^{\alpha T/2} + \alpha^* A_0^* e^{\alpha^* T/2} &= \alpha B_0 + \alpha^* B_0^* \end{aligned}$$

che ha per soluzione

$$B_0 = A_0 e^{\alpha T/2} + \frac{2\alpha^*}{\alpha^* - \alpha}\frac{F_0}{k}\,.$$

Se adesso scriviamo la soluzione tra $t = pT$ e $t = pT + T/2$ nella forma

$$x_p(t) = A_p e^{\alpha(t-pT)} + A_p^* e^{\alpha^*(t-pT)} + \frac{F_0}{k}$$

e imponiamo la continuità di soluzione e derivata in $t = T$ troviamo

$$A_1 = e^{\alpha T} A_0 + \frac{2\alpha^*}{\alpha^* - \alpha} \frac{F_0}{k} \left(e^{\alpha T/2} - 1 \right)$$

e ripetendo il ragionamento per $t = pT$

$$A_p = e^{\alpha T} A_{p-1} + \frac{2\alpha^*}{\alpha^* - \alpha} \frac{F_0}{k} \left(e^{\alpha T/2} - 1 \right) .$$

Possiamo risolvere questa relazione ricorsiva scrivendo

$$A_p = e^{\alpha p T} A_0 + \frac{2\alpha^*}{\alpha^* - \alpha} \frac{F_0}{k} \left(e^{\alpha T/2} - 1 \right) \frac{1 - e^{\alpha p T}}{1 - e^{\alpha T}}$$

che risulta valida anche per $p < 0$. Se α ha una parte reale negativa, come accade in presenza di attrito, abbiamo evidentemente che per $p \to -\infty$ i coefficienti A_p divergono. Fa eccezione il caso in cui

$$A_0 = \frac{2\alpha^*}{\alpha^* - \alpha} \frac{F_0}{k} \left(e^{\alpha T/2} - 1 \right) \frac{1}{1 - e^{\alpha T}}$$

per il quale

$$A_p = A_0$$

e che corrisponde chiaramente a una soluzione periodica.