

PROBLEMA 5.43

Molla con massa non trascurabile. Analisi approssimata. ★★★

Si vuole trattare approssimativamente l'effetto della massa non nulla μ di una molla sulla frequenza di oscillazione. Per fare questo si scrive l'energia del sistema supponendo che la molla si muova nello stesso modo in cui si muoverebbe se la sua massa fosse nulla.

con do tale metodo si determini la frequenza di oscillazione del sistema in Figura 5.35, supponendo la molla di lunghezza a riposo nulla.

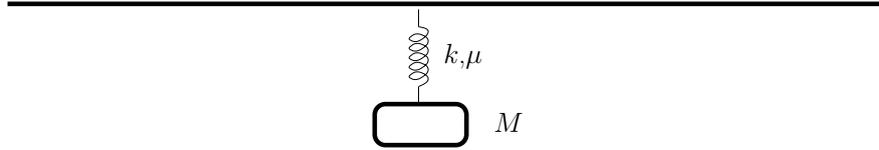


Figura 5.35.: L'oscillatore considerato nel problema, con una molla di massa non nulla μ .

Soluzione

Scriviamo l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2}M\dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}k\ell^2 + K_{\text{molla}}$$

dove K_{molla} è l'energia cinetica della molla, e ℓ la sua lunghezza. Parametizziamo la posizione di un elemento della molla come

$$x = \ell u$$

con $0 \leq u \leq 1$. Derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\dot{x} = \dot{\ell} u$$

e

$$dx = \ell du.$$

La parametrizzazione scelta è equivalente alla ipotesi che la molla si dilati in maniera uniforme. Abbiamo allora

$$K_{\text{molla}} = \frac{1}{2} \int d\mu \dot{x}^2 = \frac{\mu}{2} \int_0^1 u^2 \dot{\ell}^2 du = \frac{1}{2} \frac{\mu}{3} \dot{\ell}^2.$$

In conclusione l'energia del sistema si scrive nella forma

$$E = \frac{1}{2} \left(M + \frac{\mu}{3} \right) \dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}k\ell^2$$

5.43. MOLLA CON MASSA NON TRASCURABILE. ANALISI APPROSSIMATA. ***

che corrisponde ad un oscillatore di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M + \mu/3}}.$$