PROBLEMA 5.48

Giro della morte su guida mobile ⋆⋆

La guida circolare di raggio R e massa M evidenziata in Figura 5.38 può muoversi liberamente in direzione orizzontale. Determinare per quale velocità v_0 il punto materiale di massa m riesce a percorrerla completamente. Di quanto si è spostata la guida dopo che questo è avvenuto?

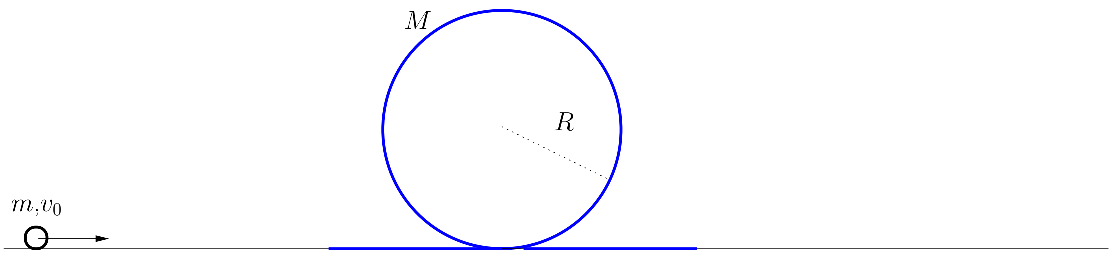

Figura 5.38.: . Il sistema considerato nell'esercizio. La guida mobile è evidenziata in blu.

Soluzione

Due quantità conservate in questo problema sono la quantità di moto orizzontale di tutto il sistema (non ci sono forze esterne orizzontali) e l'energia totale (non ci sono forze non conservative). Utilizzando come coordinate l'angolo θ che descrive la posizione della particella sulla guida e la coordinata X del centro di questa abbiamo

$$\begin{aligned} x &= X + R\sin\theta \\ y &= R(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} &= R\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} mv_0 &= M\dot{X} + m\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right) \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(R\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgR(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

Utilizzando la prima relazione possiamo eliminare $\dot{X}$ dalla seconda, ottenendo:

$$\dot{X} = \frac{m}{M+m}\left(v_0 - R\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 = \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + mgR(1-\cos\theta)\,.$$

Siamo adesso in grado di conoscere $\dot{\theta}$, $\dot{X}$ in funzione di θ. Se il vincolo della guida è bilatero per poter percorrere il giro della morte è sufficiente che $\dot{\theta} > 0$ per $\theta = \pi$. Abbiamo in generale

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\mu v_0^2 - 2mgR(1-\cos\theta)}{R^2(\mu\cos^2\theta + m\sin^2\theta)}$$

e quindi deve essere

$$v_0 > \sqrt{\frac{4mgR}{\mu}}\,.$$

Se il vincolo è monolatero è invece necessario che la reazione vincolare della guida sia sempre rivolta verso il suo centro. Possiamo discutere il problema nel sistema solidale alla guida: l'equazione del moto in direzione ortogonale alla guida si scrive

$$-mR\dot{\theta}^2 = N + mg\cos\theta - m\ddot{X}\sin\theta$$

dove abbiamo tenuto conto della opportuna proiezione della forza apparente. Possiamo scrivere N in funzione di θ utilizzando le relazioni precedenti, notando che

$$\dot{X} = \frac{m}{M+m}\left(v_0 - R\cos\theta\sqrt{\frac{\mu v_0^2 - 2mgR(1-\cos\theta)}{R^2(\mu\cos^2\theta + m\sin^2\theta)}}\right)\,.$$

Derivando ancora una volta, e sostituendo nuovamente $\dot{\theta}$ otteniamo infine tutto ciò che serve per porre $N(\theta) < 0$. Per quanto riguarda lo spostamento della guida, possiamo integrare $\dot{X}$:

$$L = \int \dot{X}dt = \int_0^{2\pi} \frac{m}{M+m}\left(v_0 - R\dot{\theta}\cos\theta\right)\frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

ossia

$$L = \frac{mv_0}{M+m}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{R^2(\mu\cos^2\theta + m\sin^2\theta)}{\mu v_0^2 - 2mgR(1-\cos\theta)}}\,d\theta\,.$$