

PROBLEMA 5.60

Campo di forze I ★

Un campo di forze nel piano è della forma

$$\begin{aligned} F_x &= Ax^m \\ F_y &= Ay^m \end{aligned}$$

con m e $A \neq 0$ costanti. Per quali valori di m e A si tratta di un campo centrale? Si tratta di un campo conservativo?

Soluzione

Il campo sarà centrale se della forma

$$\vec{F} = f(x, y)\vec{r}$$

Dovrà quindi essere

$$Ax^{m-1} = Ay^{m-1}$$

e quindi $m = 1$.

Se la forza è conservativa deve essere possibile scriverla a partire di una funzione potenziale, deve cioè essere

$$\begin{aligned} F_x = Ax^m &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = Ay^m &= -\frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}$$

Integrando la prima equazione in x e la seconda in y otteniamo

$$U = -\frac{A}{m+1}x^{m+1} + f_1(y)$$

e

$$U = -\frac{A}{m+1}y^{m+1} + f_2(x)$$

che sono compatibili se

$$U = -\frac{A}{m+1}(y^{m+1} + x^{m+1}) + C$$

dove C è una costante arbitraria. Quindi la forza è conservativa $\forall m$.