

PROBLEMA 5.61

Campo di forze II ★

Sotto quali condizioni il campo di forze nel piano

$$F_x = ax + by \quad (5.61.1)$$

$$F_y = cx + dy \quad (5.61.2)$$

è conservativo? Calcolare in tali casi il potenziale. Sotto quali condizioni è un campo centrale?

Soluzione

Per essere conservativo deve valere

$$F_x = ax + by = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (5.61.3)$$

$$F_y = cx + dy = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (5.61.4)$$

Integrando la prima equazione in x abbiamo

$$U = -\frac{a}{2}x^2 - bxy + g(y) \quad (5.61.5)$$

dove g è una funzione arbitraria. Derivando rispetto a y otteniamo

$$F_y = bx - g'(y) \quad (5.61.6)$$

che è consistente con la seconda equazione solo se

$$b = c \quad (5.61.7)$$

$$g'(y) = dy \quad (5.61.8)$$

e quindi il potenziale sarà della forma

$$U = -\frac{a}{2}x^2 - \frac{d}{2}y^2 - bxy \quad (5.61.9)$$

Il campo sarà centrale se

$$\vec{F} = f(x, y)\vec{r} \quad (5.61.10)$$

e scrivendo

$$F_x = x \left(a + b\frac{y}{x} \right) \quad (5.61.11)$$

$$F_y = y \left(c\frac{x}{y} + d \right) \quad (5.61.12)$$

troviamo che deve essere

$$a + b\frac{y}{x} = c\frac{x}{y} + d \quad (5.61.13)$$

da cui $b = c = 0$ e $a = d$. Notare che il campo è conservativo, e il potenziale vale

$$U = -\frac{a}{2}(x^2 + y^2) \quad (5.61.14)$$