

PROBLEMA 5.69

**Pendolo sferico piccolo momento angolare \*\***

Studiare le orbite circolari del pendolo sferico nel limite di piccolo momento angolare, cioè quando  $\beta \ll 1$  nella notazione dell'esercizio precedente.

**Soluzione**

Introducendo  $x = \cos \theta$  abbiamo

$$U_{eff}(\theta) = mg\ell \left( x + \frac{\beta^2}{1-x^2} \right)$$

Possiamo studiare il potenziale effettivo in  $-1 \leq x \leq 1$ . Avremo un minimo dove

$$(1-x^2)^2 + 2\beta^2 x = 0$$

e occorrerebbe determinare la radice di questa equazione tale che  $-1 \leq x \leq 1$ . La formula esatta è complicata, ma se  $\beta \ll 1$  (piccolo momento angolare) possiamo scrivere approssimativamente

$$x = x_0 + \beta x_1$$

dove  $x_0$  è la soluzione a  $\beta = 0$  e  $x_1$  una prima correzione. Avremo

$$(1-x_0^2)^2 - 4\beta x_0 x_1 (1-x_0^2) + \beta^2 (2x_0 - 2x_1^2 + 6x_0^2 x_1^2) + O(\beta^3) = 0$$

e identificando i termini al primo e al secondo ordine abbiamo

$$\begin{aligned} x_0 &= \pm 1 \\ 4x_1^2 &= 2 \end{aligned}$$

e quindi

$$x \simeq -1 + \frac{\beta}{\sqrt{2}}.$$

La posizione di minimo è quindi leggermente spostata rispetto alla verticale.