

PROBLEMA 5.70

Pendolo sferico grande momento angolare **

Studiare le orbite circolari del pendolo sferico nel limite di grande momento angolare, cioè quando $\beta \gg 1$ nella notazione dell'esercizio precedente.

Soluzione

Introducendo $x = \cos \theta$ abbiamo

$$U_{eff}(\theta) = mg\ell\beta^2 \left(\frac{x}{\beta^2} + \frac{1}{1-x^2} \right).$$

Il minimo si avrà per

$$\frac{1}{\beta^2} (1-x^2)^2 + 2x = 0.$$

Questa volta $\beta^{-1} \ll 1$ e quindi dall'approssimazione $x = x_0 + \beta^{-1}x_1$ otteniamo

$$2x_0 + \frac{1}{\beta} (1 - 2x_0^2 + x_0^4 + 2x_1) + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) = 0$$

da cui $x_0 = 0$ e $x_1 = -1/2$. Segue che

$$x = \cos \theta = -\frac{1}{2\beta}$$

cioè

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\beta}.$$

L'orbita circolare sarà quindi leggermente al di sotto del cerchio massimo orizzontale.