PROBLEMA 5.7

Moto su una guida con attrito ⋆

Una particella di massa m è vincolata a muoversi su una guida descritta dall'equazione $y = f(x)$, in presenza di gravità e di un attrito dinamico descritto da un coefficiente μ_d. La funzione $f(x)$ è identicamente nulla per $x < 0$, e la particella viene lanciata da $x = -L$ (con $L > 0$) con velocità iniziale $v_0 > \sqrt{2g\mu_d L}$. Determinare $f(x)$ per $x > 0$ in modo tale che in tale regione per la particella valga $\ddot{y} = -g$. Cosa succede se $v_0 < \sqrt{2g\mu_d L}$?

Soluzione

Se $\ddot{y} = -g$ la particella sta accelerando liberamente verso il basso. Questo significa che l'unica forza in direzione verticale è quella di gravità, e l'attrito non contribuisce. Perchè questo accada è necessario che il modulo della reazione normale del vincolo sia nulla, cioè il vincolo deve coincidere con la traiettoria della particella in caduta libera.

Per determinare quest'ultima si deve conoscere le condizioni iniziali a $x = 0$. La velocità in quel punto sarà orizzontale, e dovrà essere

$$\begin{aligned} L &= v_0 t - \frac{1}{2} g \mu_d t^2 \\ v &= v_0 - g \mu_d t \end{aligned}$$

Dalla prima equazione troviamo

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gL\mu_d}}{g\mu_s} \tag{5.7.1}$$

e sostituendo nella seconda

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gL\mu_d}\,.$$

La soluzione pertinente è quella col segno positivo. La forma della guida sarà dunque descritta parametricamente da

$$\begin{aligned} x &= t\sqrt{v_0^2 - 2gL\mu_d} \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

ossia

$$y = -\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2 - 2gL\mu_d}\,.$$

Se $v_0 < \sqrt{2g\mu_d L}$ la soluzione (5.7.1) non è reale. Questo significa che l'attrito ferma la particella prima che questa possa arrivare in $x = 0$.