

PROBLEMA 5.83

Razzo vincolato **

Un razzo di massa iniziale M_0 è fissato ad un'estremità di un'asta di massa trascurabile e lunghezza ℓ , perpendicolarmente ad essa, come in Figura 5.69. L'asta può ruotare liberamente attorno all'altro estremo in un piano orizzontale. All'accensione il razzo è fermo, e da quel momento il gas viene espulso con una velocità relativa costante $-u$. Determinare la velocità del razzo in funzione della massa di gas espulso.

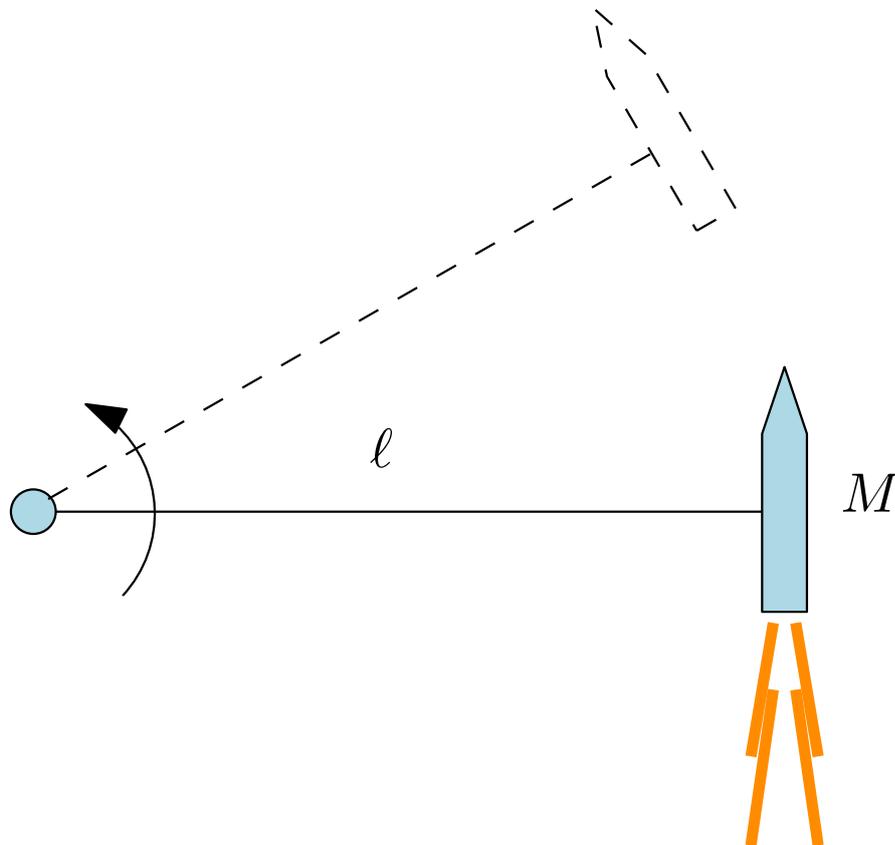


Figura 5.69.: Razzo vincolato.

Soluzione

Nella situazione considerata il momento angolare del sistema composto dall'asta, dal razzo e dal gas espulso si conserva, dato che il vincolo non può esercitare un momento di forza. Calcoliamo il momento angolare del missile ad un dato istante, tenendo conto del gas non ancora espulso:

$$L = M\ell V$$

Se ad un istante successivo calcoliamo il momento angolare del missile e del gas espulso nel frattempo, dobbiamo trovare lo stesso valore. Indicando con dM la variazione della massa del missile abbiamo

$$L = (M + dM) \ell (V + dV) - dM \ell (V - u)$$

ed uguagliando troviamo, trascurando variazioni del secondo ordine,

$$MdV\ell + dM\ell u = 0$$

ossia

$$\int_{V(0)}^{V(m)} dV = -u \int_{M_0}^{M_0-m} \frac{dM}{M}$$

dove abbiamo indicato con m la massa di gas espulso. Integrando troviamo

$$V(m) = V(0) - u \log \left(1 - \frac{m}{M_0} \right)$$