PROBLEMA 5.95

Materia oscura ⋆⋆

In un semplice modello per una galassia ciascuna stella si muove in un'orbita circolare, sotto l'azione di un potenziale centrale $U(r)$ che tiene conto delle interazioni gravitazionali con le rimanenti. Le osservazioni mostrano che la velocità di una stella dipende dalla sua distanza dal centro della galassia come

$$V(r) = \sqrt{\frac{K}{1+\frac{r}{r_0}}} \tag{5.95.1}$$

dove K e r_0 sono costanti positive.

1. Determinare il potenziale $U(r)$ che potrebbe spiegare i dati sperimentali.

2. Studiare qualitativamente le orbite nel potenziale $U(r)$, dicendo in particolare se sono possibili orbite illimitate.

3. Supponendo che la galassia sia approssimabile con una distribuzione sferica di massa, determinarne la massa totale.

Soluzione[1]

Per un'orbita circolare di raggio r la massa per l'accelerazione centripeta deve essere uguale alla forza radiale

$$-m\frac{V^2(r)}{r} = F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

Inserendo l'espressione della velocità otteniamo

$$\frac{dU}{dr} = \frac{Km}{r\left(1+\frac{r}{r_0}\right)}$$

e quindi a meno di una costante deve essere

$$U(r) = Km\log\left(\frac{2r}{r+r_0}\right)$$

Il potenziale efficace vale

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + Km\log\left(\frac{2r}{r+r_0}\right)$$

[1] Prova scritta del 1/5/2009

che diverge $\propto r^{-2}$ per piccoli r e tende alla costante $C_\infty = Km \log 2$ per $r \to \infty$. Esistono quindi orbite illimitate, corrispondenti a energie $E > C_\infty$. Il potenziale ha un unico minimo determinato dall'unica soluzione positiva di

$$\frac{dU_{eff}(r)}{dr} = \frac{Km^2r^2r_0 - L^2(r+r_0)}{mr^3\,(r+r_0)} = 0$$

cioè

$$r = r^* = \frac{L^2 + L\sqrt{L^2 + 4Km^2r_0^2}}{2Km^2r_0}$$

corrispondente all'orbita circolare di momento angolare L (e energia $E = U_{eff}(r^*)$).

Se la distribuzione di massa della galassia è sferica deve essere

$$F_r(r) = \frac{GmM(r)}{r^2}$$

dove $M(r)$ è la parte della massa totale contenuta in una sfera di raggio r. Se confrontiamo questa espressione della forza radiale con quella ottenuta precedentemente abbiamo

$$\frac{Km}{r\left(1+\frac{r}{r_0}\right)} = \frac{GmM(r)}{r^2}$$

La massa totale della galassia sarà dunque

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = \lim_{r\to\infty} \frac{Kr^2}{Gr\left(1+\frac{r}{r_0}\right)} = \frac{Kr_0}{G}$$