

PROBLEMA 6.24

Momento di inerzia e proiezioni II **

Mostrare che il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse γ si può scrivere come somma dei momenti di inerzia di due lamine ottenute proiettando tutti gli elementi di massa su due piani passanti per γ e ortogonali tra di loro. Usare questo risultato e quello del problema 6.24 per calcolare il momento di inerzia di un cilindro omogeneo di massa M , raggio di base R e altezza h rispetto all'asse in Figura 6.12.

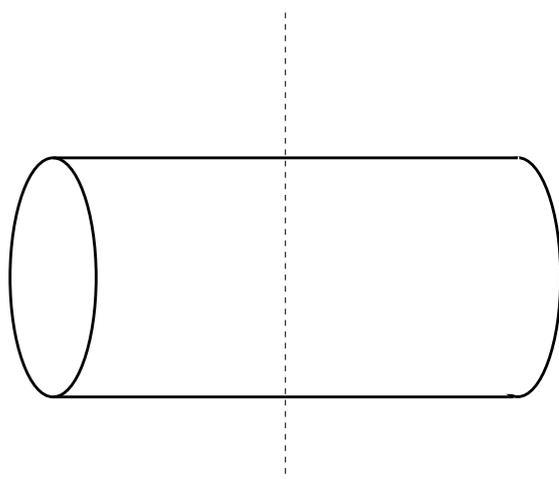


Figura 6.12.: L'asse rispetto al quale calcolare il momento di inerzia nel problema.

Soluzione

Scegliamo per γ l'asse z . Abbiamo quindi

$$I = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2$$

dove il primo termine è il momento di inerzia del corpo proiettato sul piano $y = 0$ e il secondo quello del corpo proiettato sul piano $x = 0$. Nel caso del cilindro, la prima proiezione (\mathcal{P}_x , vedere Figura 6.13) da un disco di massa M uniformemente distribuita e raggio R , per cui

$$I_1 = \frac{M}{\pi R^2} \int \int r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta = \frac{MR^2}{4}$$

Per calcolare il secondo termine proiettiamo prima nel piano $z = 0$ (\mathcal{P}_z , vedere Figura 6.13): per quanto discusso nel problema 6.23 il momento di inerzia non cambia. Proiettiamo adesso nel piano $y = 0$ (\mathcal{P}_y , vedere figura): abbiamo una distribuzione lineare uniforme di massa, e quindi

$$I_2 = \frac{1}{12} M h^2$$

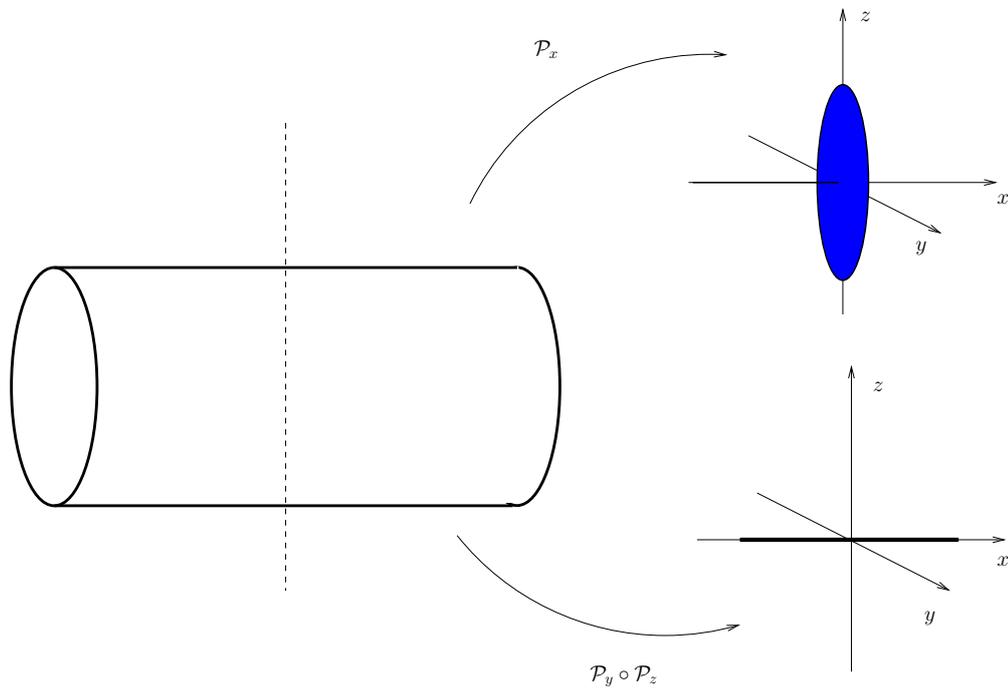


Figura 6.13.: Proiezioni del cilindro.

Il risultato finale è quindi

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{4}M \left(R^2 + \frac{1}{3}h^2 \right)$$