PROBLEMA 6.40

Oscillazioni forzate di un'asta ⋆⋆

Un'asta di lunghezza ℓ e massa m è fissata a una parete verticale attraverso un giunto elastico con momento di richiamo $M = -k\theta$, dove θ è l'angolo con il quale si deforma il giunto. Si suppone il giunto sufficientemente rigido per cui gli angoli sono piccoli. In assenza di gravità l'asta è perpendicolare alla parete.

1. Calcolare la posizione di equilibrio sotto l'influenza della gravità e il periodo delle piccole oscillazioni.

2. La parete si muove con moto sinusoidale di ampiezza y_0 con frequenza ω. Si calcoli l'ampiezza del moto a regime dell'asta.

3. Il giunto ha una dissipazione viscosa che genera un momento $M_v = -\gamma\dot{\theta}$. Si calcoli l'ampiezza e la fase del moto a regime dell'asta in funzione di ω. Qual'è l'energia dissipata per ciclo?

Soluzione[11]

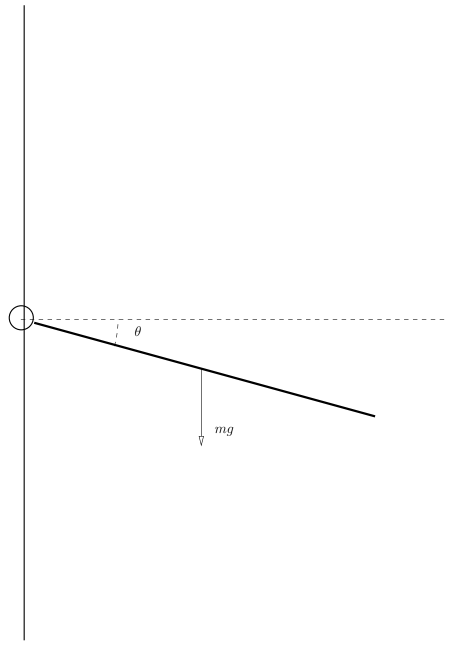

Figura 6.37.: L'asta fissata sulla parete mediante un giunto elastico.

[11] Secondo esercizio compitino 1/4/2009.

Problema 1

Riferendosi alla Figura 6.37, possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma

$$\frac{dL}{dt} = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - k\theta \tag{6.40.1}$$

dove $L = I\dot{\theta}$ è il momento angolare rispetto ad un polo posto nel giunto elastico. Il momento di inerzia è dato da

$$I = \int_0^\ell \frac{m}{\ell} r^2 dr = \frac{m\ell^2}{3} \tag{6.40.2}$$

Per piccoli angoli possiamo porre $\cos\theta \simeq 1$, ottenendo per la posizione di equilibrio

$$\theta_{eq} = -\frac{mg\ell}{2k} \tag{6.40.3}$$

Nella stessa approssimazione l'equazione del moto si scrive

$$I\ddot{\delta} + k\delta = 0 \tag{6.40.4}$$

dove abbiamo posto $\theta = \theta_{eq} + \delta$. Il periodo delle piccole oscillazioni è dato quindi da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{3k}} \tag{6.40.5}$$

Problema 2

Se la parete si muove secondo $y = y_0 \cos\omega t$ nel sistema solidale ad essa agisce una forza apparente

$$F = my_0\omega^2 \cos\omega t \tag{6.40.6}$$

e quindi

$$I\ddot{\delta} + k\delta = \mathcal{M} \tag{6.40.7}$$

dove $\mathcal{M}$ è il momento della forza apparente,

$$\mathcal{M} = m\frac{\ell}{2}y_0\omega^2\cos\omega t = \mathrm{Re}\left(\mathcal{M}_0 e^{i\omega t}\right) \tag{6.40.8}$$

ed abbiamo posto

$$\mathcal{M}_0 = m\frac{\ell}{2}y_0\omega^2\,. \tag{6.40.9}$$

Utilizzando il metodo dei fasori otteniamo la soluzione a regime della forma

$$\delta = \mathrm{Re}\left(\mathcal{A}e^{i\omega t}\right) \tag{6.40.10}$$

con

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{M}_0}{(k - I\omega^2)} \tag{6.40.11}$$

che rappresenta l'ampiezza del moto a regime.

Problema 3

L'equazione del moto diventa adesso

$$I\ddot{\delta}+\gamma\dot{\delta}+k\delta=\mathcal{M}\,. \tag{6.40.12}$$

Con lo stesso metodo utilizzato in precedenza otteniamo adesso

$$\mathcal{A}=\frac{\mathcal{M}_0}{(k+i\omega\gamma-I\omega^2)} \tag{6.40.13}$$

che corrisponde ad una ampiezza

$$|\mathcal{A}|=\frac{\mathcal{M}_0}{\sqrt{\gamma^2\omega^2+(k-I\omega^2)^2}} \tag{6.40.14}$$

e a una fase

$$\phi=\arg\mathcal{A} \tag{6.40.15}$$

con

$$\cos\phi=\frac{k-I\omega^2}{\sqrt{\gamma^2\omega^2+(k-I\omega^2)^2}} \tag{6.40.16}$$

$$\sin\phi=\frac{-\omega\gamma}{\sqrt{\gamma^2\omega^2+(k-I\omega^2)^2}}\,. \tag{6.40.17}$$

L'energia dissipata in un ciclo si può ottenere a regime calcolando il lavoro fatto dalla forza esterna in un periodo. Tenendo conto che la forza è applicata al centro di massa abbiamo

$$W_{diss}=\int_0^T F\times v\,dt=\int_0^T\mathcal{M}\times\dot{\delta}dt \tag{6.40.18}$$

e d'altra parte

$$W_{diss}=\int_0^T\mathrm{Re}\left(\mathcal{M}_0e^{i\omega t}\right)\times\mathrm{Re}\left(i\omega\mathcal{A}e^{i\omega t}\right)dt \tag{6.40.19}$$

Usando l'identità

$$\int_0^T\mathrm{Re}\left(ue^{i\omega t}\right)\mathrm{Re}\left(ve^{i\omega t}\right)dt=\frac{\pi}{\omega}\mathrm{Re}\left(u^*v\right) \tag{6.40.20}$$

valida per due numeri complessi u, v qualsiasi, troviamo

$$W_{diss}=\frac{\pi}{\omega}\mathrm{Re}\left[i\omega\mathcal{M}_0\mathcal{A}\right]=\frac{\pi}{\omega}\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega\mathcal{M}_0^2}{k+i\omega\gamma-I\omega^2}\right] \tag{6.40.21}$$

ossia

$$W_{diss}=\frac{\pi\omega\gamma\mathcal{M}_0^2}{(k-I\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \tag{6.40.22}$$