

PROBLEMA 6.60

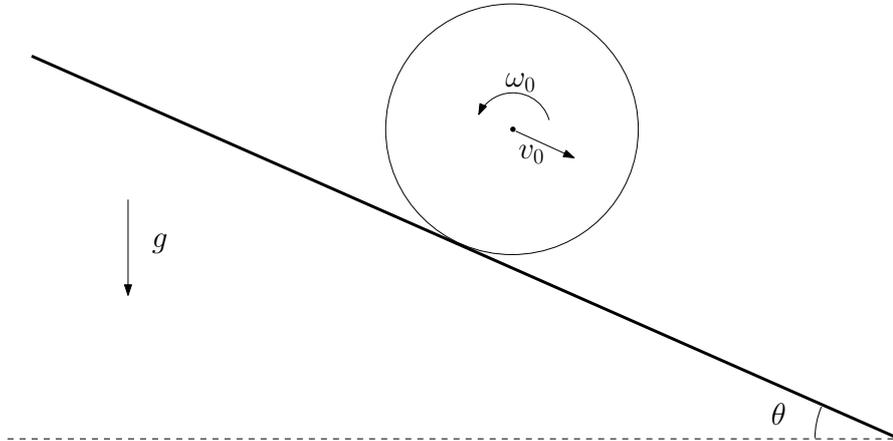
Cilindro in caduta su un piano inclinato **

Figura 6.60.: Il cilindro nella posizione iniziale. Le velocità v_0 e ω_0 sono arbitrarie (anche in segno).

Un cilindro di massa M e raggio R viene lanciato lungo un piano inclinato con velocità iniziale v_0 e velocità angolare ω_0 . Il piano è inclinato rispetto alla direzione orizzontale di un angolo θ , ed è presente attrito dinamico, caratterizzato dal coefficiente μ . Discutere sotto quali condizioni il cilindro dopo un tempo sufficientemente lungo inizia a compiere un moto di puro rotolamento.

Soluzione

Scriviamo la prima e la seconda equazione cardinale per il cilindro. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g \sin \theta + \frac{1}{m} F_a \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{F_a}{I} R \end{aligned} \quad (6.60.1)$$

dove abbiamo indicato con F_a la forza di attrito, che scriveremo nella forma

$$F_a = \begin{cases} \mu mg \cos \theta & v_p < 0 \\ -\mu mg \cos \theta & v_p > 0 \end{cases}$$

dove

$$v_p = v + \omega R$$

è la velocità del punto del cilindro a contatto con il piano. La condizione di rotolamento puro corrisponde a $v_p = 0$. Combinando le due equazioni del moto possiamo costruire

una equazione per v_P

$$\frac{dv_P}{dt} = \frac{d}{dt}(v + \omega R) = g \sin \theta + \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right) \frac{F_a}{m}$$

ossia

$$\frac{dv_P}{dt} = \begin{cases} g \sin \theta - 3\mu g \cos \theta & v_P > 0 \\ g \sin \theta + 3\mu g \cos \theta & v_P < 0 \end{cases}$$

Vediamo che nel caso $v_P < 0$ l'accelerazione \dot{v}_P è costante e positiva. Di conseguenza v_P crescerà linearmente e avremo rotolamento puro dopo un intervallo di tempo

$$t = -\frac{v_0 + \omega_0 R}{g(\sin \theta + 3\mu \cos \theta)}$$

Nel caso $v_P > 0$ dobbiamo distinguere due casi. Se

$$\mu > \frac{1}{3} \tan \theta$$

avremo $\dot{v}_P > 0$, e arriveremo al rotolamento puro dopo un tempo

$$t = \frac{v_0 + \omega_0 R}{g(3\mu \cos \theta - \sin \theta)}$$

In caso contrario $\dot{v}_P < 0$ e la condizione di rotolamento puro non sarà mai raggiunta. La situazione è riassunta in Figura 6.61.

In essa un punto nel piano corrisponde ad una possibile combinazione di velocità e velocità angolare. Gli assi e la bisettrice del secondo e quarto quadrante dividono il piano in sei zone: per ciascuna è indicato il verso della velocità angolare, della velocità del punto di contatto con il piano e del centro di massa. La linea rossa corrisponde ai moti di puro rotolamento.

Indipendentemente da μ e θ un punto al di sotto della della linea rossa evolve sempre verso di essa. Infatti dalle Equazioni (6.60.1) segue che in questa regione $\dot{\omega} > 0$, $\dot{v} > 0$, dato che $F_a > 0$. Quindi il sistema si sposterà come indicato dalle frecce viola.

Un punto al di sopra della linea rossa ha $\dot{\omega} < 0$, ma \dot{v} può essere sia positivo che negativo ($F_a < 0$, Equazioni (6.60.1)). Quindi può evolvere verso rotolamento puro (linee viola) oppure no (linee verdi), in accordo con l'analisi precedente.

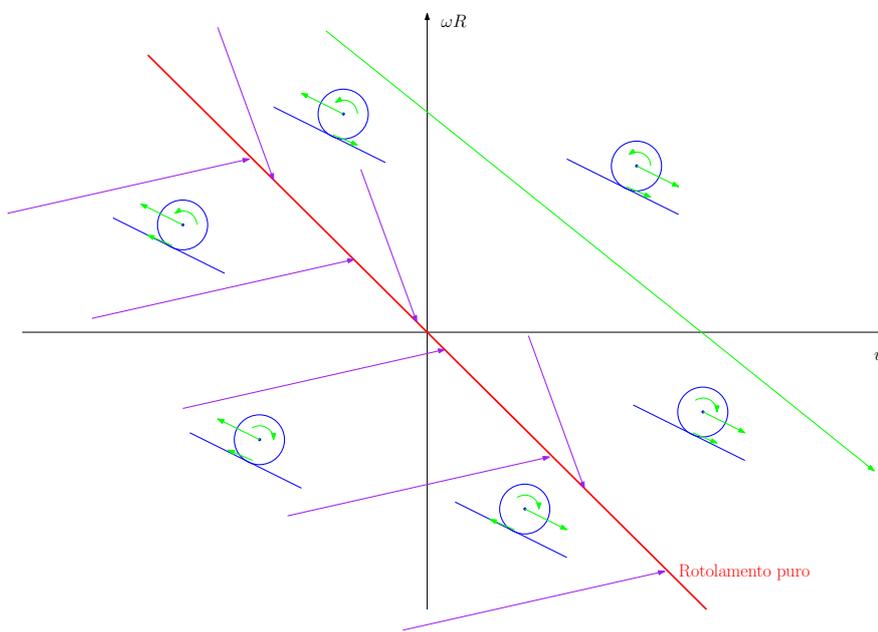


Figura 6.61.: L'evoluzione del sistema nel piano $(\omega R, v)$.