

PROBLEMA 6.68

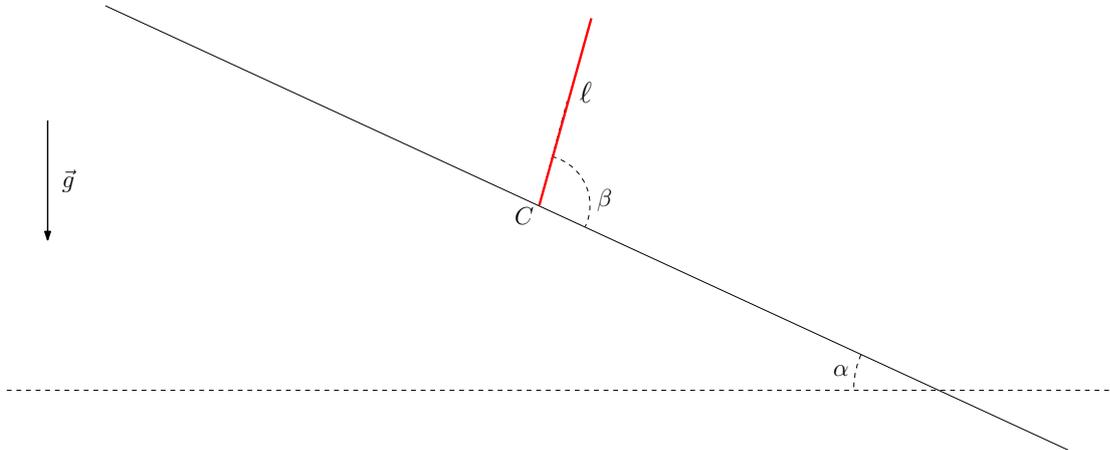
Matita che scivola lungo un piano inclinato **

Figura 6.72.: La matita (in rosso) in caduta lungo il piano inclinato. L'angolo β resta fisso.

Una matita (un'asta sottile e omogenea) ha una lunghezza ℓ e una massa totale m . Un suo estremo C viene appoggiato ad un piano inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo α . L'asta e la normale per C al piano inclinato giacciono sullo stesso piano verticale π .

L'angolo β , misurato sul piano π , tra l'asta e il piano inclinato è scelto in modo tale che l'asta possa scendere lungo il piano inclinato senza ruotare (vedere Figura 6.72) con accelerazione costante a . Il piano esercita una forza di attrito dinamico caratterizzato da un coefficiente μ .

Calcolare, se esiste, l'angolo β e l'accelerazione a .

Soluzione

Scriviamo le due componenti della prima equazione cardinale nel piano π , lungo la direzione perpendicolare e parallela al piano. Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= N - mg \cos \alpha \\ ma &= -\mu N + mg \sin \alpha \end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che l'asta non ruota, e quindi tutta l'accelerazione a del suo centro di massa è parallela al piano. Inoltre stiamo supponendo $v > 0$. Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha \\ a &= g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \end{aligned}$$

Utilizziamo adesso la seconda equazione cardinale rispetto ad un polo posto nel centro di massa dell'asta. Dato che rispetto al polo scelto il momento angolare è nullo possiamo scrivere, per la componente L del momento angolare e M del momento perpendicolare a π

$$0 = N \frac{\ell}{2} \cos \beta + \mu N \frac{\ell}{2} \sin \beta$$

e sostituendo il valore di N troviamo la condizione

$$(\cos \beta + \mu \sin \beta) \cos \alpha = 0$$

A parte il caso nel quale il piano è verticale ($\cos \alpha = 0$) per il quale la relazione è sempre verificata, vediamo che deve essere

$$\tan \beta = -\frac{1}{\mu}$$

quindi l'asta deve essere inclinata di un angolo $\beta > \pi/2$, tendente a $\pi/2$ per $\mu \rightarrow 0$. Notare che per $\mu \rightarrow +\infty$ apparentemente $\beta \rightarrow \pi$. Questo è un risultato corretto, ma si deve tenere conto del fatto che per

$$\mu > \tan \alpha$$

l'accelerazione dell'asta diviene negativa. Quindi questa se lanciata inizialmente con velocità positiva arriva a fermarsi e l'analisi fatta non è più applicabile.