

PROBLEMA 7.5

Campo di velocità I **

Il campo di velocità di un fluido è descritto da $\vec{v} = (\alpha x, -\alpha y, 0)$. La regione $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ viene marcata con un colorante a $t = 0$. Determinare la forma della regione colorata agli istanti successivi, e il suo volume.

Soluzione

Dall'espressione del campo di velocità si determinano le traiettorie degli elementi di fluido risolvendo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x \\ \frac{dy}{dt} &= -\alpha y \\ \frac{dz}{dt} &= 0\end{aligned}$$

che si integrano direttamente ottenendo

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0)e^{\alpha t} \\ y(t) &= y(0)e^{-\alpha t} \\ z(t) &= z(0)\end{aligned}$$

Dato che $x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 < 1$ otteniamo

$$\frac{x(t)^2}{e^{2\alpha t}} + \frac{y(t)^2}{e^{-2\alpha t}} + z(t)^2 < 1$$

quindi agli istanti successivi la macchia di colore ha la forma di un ellissoide con semiassi $a_x = e^{\alpha t}$, $a_y = e^{-\alpha t}$, $a_z = 1$. Il volume è dato da

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi a_x a_y a_z = \frac{4}{3}\pi$$

e si conserva.