

PROBLEMA 9.13

Trasformazione ciclica irreversibile **

Su n moli di gas perfetto si esegue una trasformazione ciclica tra tre stati termodinamici A , B e C come segue:

- Partendo da A , si cede reversibilmente calore mantenendo il gas a volume costante, fino ad arrivare a B .
- Il gas subisce adesso una espansione isoterma, anche essa reversibile, che lo porta nello stato C .
- A questo punto il gas viene messo in contatto con un bagno termico ad una temperatura T_A non nota. La trasformazione irreversibile che segue avviene abbastanza lentamente da poter considerare istante per istante ben definito lo stato termodinamico del gas, che viene mantenuto a pressione costante. Quando si raggiunge nuovamente l'equilibrio termico il gas si trova nuovamente in A .

Si conosce la temperatura T_B , e il calore Q_{BC} assorbito dal gas durante la trasformazione isoterma. Si vuole calcolare:

1. La variazione di entropia del gas ΔS_{BC}^g tra B e C .
2. La temperatura T_A .
3. Il lavoro $L_{CA} + L_{AB}$ fatto dal gas tra C e B .
4. La variazione di entropia dell'universo dopo una trasformazione ciclica completa.

Soluzione

1. La trasformazione isoterma è reversibile, e conosciamo il calore assorbito dal gas, quindi

$$\Delta S_{BC}^g = \int_B^C \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_B} \int_B^C dQ = \frac{Q_{BC}}{T_B} \quad (9.13.1)$$

2. Dato che la trasformazione è ciclica, e che l'entropia è una funzione di stato, sappiamo che l'entropia del gas non può cambiare in un ciclo. Possiamo quindi scrivere

$$\Delta S^g = \Delta S_{AB}^g + \Delta S_{BC}^g + \Delta S_{CA}^g = 0 \quad (9.13.2)$$

ma

$$\Delta S_{AB}^g = nc_v \log \frac{T_B}{T_A} \quad (9.13.3)$$

$$\Delta S_{BC}^g = \frac{Q_{BC}}{T_B} \quad (9.13.4)$$

$$\Delta S_{CA}^g = nc_p \log \frac{T_A}{T_B} \quad (9.13.5)$$

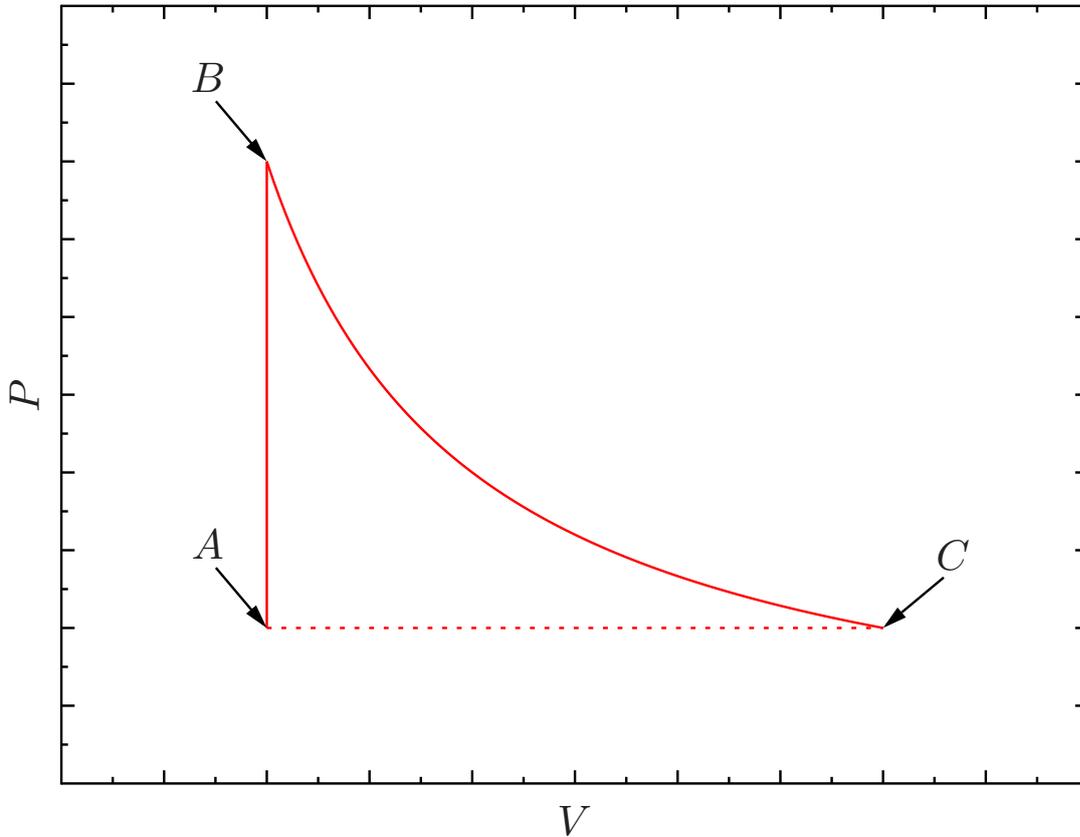


Figura 9.9.: Il ciclo considerato nel problema. La linea tratteggiata identifica la trasformazione irreversibile.

Notare che non è necessario calcolare alcun integrale di Clausius, ma solo utilizzare ancora una volta il fatto che l'entropia è una funzione di stato. Allora

$$n(c_p - c_v) \log \frac{T_A}{T_B} + \frac{Q_{BC}}{T_B} = 0 \quad (9.13.6)$$

da cui segue

$$T_A = T_B e^{-\frac{Q_{BC}}{nRT_B}} \quad (9.13.7)$$

3. Dal primo principio abbiamo

$$Q_{CA} + Q_{AB} = \Delta U_{CB} + L_{CA} + L_{AB} \quad (9.13.8)$$

e inoltre $\Delta U_{CB} = 0$ dato che l'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla temperatura e $T_C = T_B$. Possiamo scrivere

$$Q_{AB} = nc_v (T_B - T_A) \quad (9.13.9)$$

$$Q_{CA} = nc_p (T_A - T_C) \quad (9.13.10)$$

Nel secondo caso osserviamo che, nonostante la trasformazione $C \rightarrow A$ sia irreversibile, lo stato termodinamico del gas è per ipotesi ben definito istante per istante e quindi è lecito applicare a quest'ultimo la legge dei gas perfetti e il primo principio. Otteniamo quindi

$$L_{CA} + L_{AB} = nR(T_A - T_C) \quad (9.13.11)$$

Alternativamente si poteva osservare che $L_{AB} = 0$ e calcolare direttamente

$$L_{CA} = \int_C^A PdV = P_A V_A - P_C V_C = nR(T_A - T_C) \quad (9.13.12)$$

ottenendo lo stesso risultato.

4. Osserviamo che durante la trasformazione $A \rightarrow B$ e l'entropia dell'universo non cambia, dato che le trasformazioni sono reversibili. Resta da calcolare la variazione di entropia nella trasformazione $C \rightarrow A$. Abbiamo

$$\Delta S = \Delta S_{CA} = \Delta S_{CA}^g + \Delta S_{CA}^s \quad (9.13.13)$$

dove ΔS_{CA}^g è la variazione di entropia del gas e ΔS_{CA}^s quella del bagno termico. Dato che, come abbiamo detto, lo stato termodinamico del gas è ben definito possiamo scrivere

$$\Delta S_{CA}^g = \int_C^A \frac{dQ}{T} = \int_C^A \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \log \frac{T_A}{T_B} \quad (9.13.14)$$

Per quanto riguarda la sorgente, da essa è estratto il calore ceduto al gas

$$Q_{CA} = nc_p (T_A - T_B) \quad (9.13.15)$$

e quindi

$$\Delta S_{CA}^s = nc_p \frac{T_B - T_A}{T_A} \quad (9.13.16)$$

Abbiamo in conclusione

$$\Delta S = nc_p \log \frac{T_A}{T_B} + nc_p \frac{T_B - T_A}{T_A} \quad (9.13.17)$$

Mostriamo che $\Delta S \geq 0$. Consideriamo ΔS una funzione di T_A a fissato T_B . Per $T_A = T_B$ si trova $\Delta S = 0$. Inoltre

$$\frac{d}{dT_A} \Delta S = nc_p \frac{1}{T_A} - nc_p \frac{T_B}{T_A^2} = \frac{nc_p}{T_A} \left(1 - \frac{T_B}{T_A} \right) \quad (9.13.18)$$

e quindi la funzione è crescente per $T_A > T_B$ e decrescente per $T_A < T_B$. Il valore $\Delta S = 0$ in $T_A = T_B$ è quindi un minimo.