

PROBLEMA 9.22

Trasformazione termodinamica con attrito ** S

Una macchina termica è costituita da un cilindro di sezione S munito di pistone, contenente n moli di un gas perfetto. Tra cilindro e pistone si ha attrito statico e dinamico, con $|F_{stat}| \leq |F_{dyn}| = F_0$, dove F_0 è una costante assegnata. L'energia dissipata per attrito passa interamente all'interno del contenitore.

1. In assenza di attrito determinare il lavoro necessario, in una lenta compressione adiabatica, per dimezzare il volume del gas partendo da $V = V_0$ e $T = T_0$.
2. Stessa domanda in presenza di attrito. Determinare anche la variazione di entropia del gas.
3. Discutere l'efficienza che è possibile ottenere utilizzando la macchina termica descritta per ottenere lavoro avendo a disposizione due bagni termici di temperature T_1 e $T_2 > T_1$, mediante cicli di Carnot.

Può essere utile il seguente risultato. L'integrale generale di una equazione del tipo

$$y' + \frac{a}{x}y = b$$

con a e b costanti è dato da

$$y = \frac{A}{x^a} + \frac{b}{a+1}x$$

dove A è una costante di integrazione.

Soluzione³**Esercizio 1**

In assenza di attrito abbiamo a che fare con una compressione adiabatica, per la quale

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma = nRT_0V_0^{\gamma-1}$$

Abbiamo quindi

$$W = - \int_{V_0}^{\frac{1}{2}V_0} PdV = -nRT_0V_0^{\gamma-1} \int_{V_0}^{\frac{1}{2}V_0} \frac{dV}{V^\gamma}$$

da cui

$$W = nRT_0V_0^{\gamma-1} \frac{1}{\gamma-1} \left[\frac{1}{(V_0/2)^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_0^{\gamma-1}} \right] = nc_vT_0 (2^{\gamma-1} - 1)$$

³Secondo esercizio scritto 19 giugno 2007

Esercizio 2

In presenza di attrito il lavoro fatto sul sistema è dato da

$$dW = -P_{ext}dV$$

dove la pressione esterna è legata a quella del gas dalla relazione

$$P_{ext} = P + P^*$$

dove abbiamo posto per semplicità $P^* = F_0/S$. Abbiamo inoltre

$$0 = dU + P_{ext}dV$$

e quindi

$$nc_v dT = - \left(\frac{nRT}{V} + P^* \right) dV$$

Otteniamo una equazione differenziale del tipo descritto nel testo, con $y = T$, $x = V$, $a = R/c_v = \gamma - 1$ e $b = -F_0/(nc_v S)$. Otteniamo infine

$$T = \frac{A}{V^{\gamma-1}} - \frac{P^*}{nc_v \gamma} V$$

In termini delle condizioni iniziali

$$T = \left(T_0 + \frac{P^* V_0}{nc_v \gamma} \right) \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} - \frac{P^* V_0}{nc_v \gamma} \left(\frac{V}{V_0} \right)$$

Possiamo adesso calcolare il lavoro:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\alpha V_0}^{V_0} \left(\frac{nRT}{V} + P^* \right) dV \\ &= V_0 \int_{\alpha}^1 \left(\frac{nR}{V_0} T(u) + P^* \right) du \end{aligned}$$

dove $u = V/V_0$ e α è il rapporto tra volume finale e iniziale ($\alpha = 1/2$ nel caso considerato). Sostituendo l'espressione ottenute precedentemente per la temperatura si ottiene

$$W = V_0 \int_{\alpha}^1 \left[\left(P_0 + \frac{R}{c_v \gamma} P^* \right) \frac{1}{u^{\gamma-1}} + \frac{1}{\gamma} P^* u \right] du$$

e quindi

$$W = V_0 \left[\frac{1}{\gamma-2} \left(P_0 + \frac{R}{c_v \gamma} P^* \right) \left(\frac{1}{\alpha^{\gamma-2}} - 1 \right) + \frac{1}{2\gamma} P^* (1 - \alpha^2) \right]$$

Per calcolare la variazione dell'entropia possiamo semplicemente usare la formula

$$S = nc_v \log T + nR \log V + C$$

valida per qualsiasi gas perfetto. Dato che l'entropia è una funzione di stato abbiamo

$$\Delta S = nc_v \log \left[\left(1 + \frac{P^* \gamma - 1}{P_0 \gamma} \right) \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} - \frac{P^* \gamma - 1}{P_0 \gamma} \alpha \right] + nR \log \alpha$$

che si può anche scrivere

$$\Delta S = nc_v \log \left[\left(1 + \frac{P^* \gamma - 1}{P_0 \gamma} \right) - \frac{P^* \gamma - 1}{P_0 \gamma} \alpha^\gamma \right]$$

Notare che $\Delta S \rightarrow 0$ se il rapporto tra la pressione iniziale del gas e P^* tende a zero.

Esercizio 3

L'efficienza è minore di quella di una macchina reversibile ideale. Questo si può mostrare scrivendo

$$Q_2 - Q_1 = W$$

dove Q_2 è il calore assorbito dalla macchina in un ciclo, Q_1 quello ceduto e W il lavoro prodotto. Per quanto riguarda l'entropia prodotta in un ciclo abbiamo

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$$

e segue che

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} - \frac{T_1 \Delta S}{Q_2}$$

L'efficienza è vicina a quella ideale quando la trasformazione è reversibile.

Calcoliamo il lavoro utile estratto in un ciclo. Per la compressione adiabatica possiamo utilizzare la formula ricavata all'esercizio precedente. Per l'espansione adiabatica dobbiamo tenere conto del fatto che la forza di attrito cambia segno, essendo sempre opposta al movimento del pistone. Quindi

$$W_{D \rightarrow A} = \frac{1}{\gamma - 2} V_D P_D \left[\left(\frac{V_A}{V_D} \right)^{\gamma-2} - 1 \right] \left\{ 1 + \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} - \frac{\gamma - 2}{2\gamma} \frac{1 - \left(\frac{V_A}{V_D} \right)^2}{1 - \left(\frac{V_A}{V_D} \right)^{\gamma-2}} \right] \left(\frac{P^*}{P_D} \right) \right\}$$

$$W_{B \rightarrow C} = \frac{1}{\gamma - 2} V_B P_B \left[\left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma-2} - 1 \right] \left\{ 1 - \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} - \frac{\gamma - 2}{2\gamma} \frac{1 - \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^2}{1 - \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma-2}} \right] \left(\frac{P^*}{P_B} \right) \right\}$$

il lavoro sulle isoterme si calcola direttamente:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{V_A}^{V_B} (P - P^*) dV = nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A} - P^*(V_B - V_A)$$

$$W_{C \rightarrow D} = \int_{V_C}^{V_D} (P + P^*) dV = nRT_1 \log \frac{V_D}{V_C} + P^*(V_D - V_C)$$

Per quanto riguarda il calore assorbito dalla sorgente calda, dato che esso viene estratto durante una trasformazione isoterma avremo $Q_2 = W_{A \rightarrow B}$. L'efficienza sarà dunque

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A}}{W_{A \rightarrow B}}$$

Le formule precedenti si discostano da quelle in presenza di attrito per correzioni che saranno trascurabili quando $P \gg P^*$. Segue che sarà possibile ottenere una efficienza arbitrariamente vicina al caso irreversibile lavorando a pressioni del gas elevate.