

PROBLEMA 9.28

Raffreddare un corpo, scaldarne un altro ** S

Standardi di capacità termica costante C sono inizialmente ad una temperatura T_i , e sono collegati mediante una macchina termica ciclica. Si vuole raffreddare il primo dei due corpi ad una temperatura finale $T_1 < T_i$, e si trova che per farlo è necessario fare un lavoro W .

1. Supponendo di conoscere W calcolare la temperatura T_2 del secondo corpo.
2. Supponendo che la macchina termica sia reversibile, calcolare $W = W_R$.
3. Se in realtà il lavoro necessario è $W = kW_R$, dove k è una costante data, calcolare la variazione di entropia del sistema. Può accadere che $k < 1$?

Soluzione⁷

Domanda 1 Se Q_1 è il calore estratto dal primo corpo, e Q_2 quello fornito al secondo, dal primo principio abbiamo

$$Q_2 - Q_1 = W$$

ma d'altra parte

$$\begin{aligned} Q_2 &= C(T_2 - T_i) \\ Q_1 &= -C(T_1 - T_i) \end{aligned}$$

e quindi

$$W = C(T_1 + T_2 - 2T_i)$$

da cui

$$T_2 = \frac{W}{C} + 2T_i - T_1 \quad (9.28.1)$$

Domanda 2 Se la macchina è reversibile l'entropia del sistema non è cambiata. Quest'ultima si scrive come

$$dS = -\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2}$$

ed integrando

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_i}^{T_1} \frac{CdT'}{T'} + \int_{T_i}^{T_2} \frac{CdT'}{T'} \\ &= C \log \frac{T_1 T_2}{T_i^2} \end{aligned} \quad (9.28.2)$$

⁷Secondo esercizio scritto Fisica I del 10 settembre 2010.

Quindi

$$T_2 = \frac{T_i^2}{T_1}$$

e

$$W_R = CT_i \left(\frac{T_1}{T_i} + \frac{T_i}{T_1} - 2 \right) \equiv CT_i \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \quad (9.28.3)$$

con $x = T_1/T_i$.

Domanda 3 Mettendo insieme l'Equazione (9.28.1) e l'Equazione (9.28.2) otteniamo

$$x \left(\frac{kW_R}{CT_i} + 2 - x \right) = e^{\Delta S/C}$$

ossia

$$(k-1)(x-1)^2 = e^{\Delta S/C} - 1$$

Dato che $\Delta S \geq 0$, segue che $k \geq 1$. Infine

$$\Delta S = C \log \left[1 + (k-1)(x-1)^2 \right]$$