

PROBLEMA 9.31

**Lavoro estraibile da due corpi: studio grafico \*\***

Due corpi di capacità termica costante  $C$  si trovano inizialmente alle temperature  $T_1$  e  $T_2$ . Mediante una certa trasformazione termodinamica che non coinvolge altri sistemi termodinamici le temperature vengono portate ai valori finali rispettivamente  $T_{1f}$  e  $T_{2f}$ . Nel corso della trasformazione il sistema complessivo varia la sua entropia di  $\Delta S$  e viene estratto un lavoro utile  $W$ .

Rappresentare nel piano  $T_{1f}$ , il luogo dei punti accessibili per un fissato valore di  $\Delta S$ . Sempre sullo stesso diagramma rappresentare il luogo dei punti che corrispondono ad un fissato valore di  $W$ . Discutere i casi particolari che corrispondono al massimo lavoro estraibile ed a  $W = 0$ .

**Soluzione**

La variazione di entropia dei due corpi durante la trasformazione è data da

$$\Delta S_1 = C \log \frac{T_{1f}}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = C \log \frac{T_{2f}}{T_2}$$

di conseguenza

$$\Delta S = C \log \frac{T_{1f} T_{2f}}{T_1 T_2}$$

da cui troviamo l'equazione che determina il luogo dei punti accessibili nel piano  $T_{1f}$ ,  $T_{2f}$ :

$$T_{1f} T_{2f} = T_1 T_2 e^{\Delta S/C}$$

Si tratta di un'iperbole equilatera che passa per il punto corrispondente alla temperatura iniziale nel caso  $\Delta S = 0$ . Alcune iperboli sono rappresentate in Figura 9.23.

Per quanto riguarda i punti che corrispondono a un dato lavoro estratto  $W$ , detti  $Q_1$  e  $Q_2$  i calori ceduti ai due corpi durante la trasformazione, abbiamo

$$Q_1 = C (T_{1f} - T_1)$$

$$Q_2 = C (T_{2f} - T_2)$$

e per la conservazione dell'energia deve essere  $W + Q_1 + Q_2 = 0$  da cui troviamo

$$W = C (T_1 + T_2 - T_{1f} - T_{2f})$$

Si tratta quindi di una retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, che intercetta l'asse  $T_{1f} = 0$  in  $T_{2f} = T_1 + T_2 - W/C$ ,

$$T_{2f} = -T_{1f} + T_1 + T_2 - \frac{W}{C}$$

Alcune di queste rette sono pure indicate in Figura 9.23. Gli stati finali possibili devono in ogni caso corrispondere a  $\Delta S \geq 0$ , che corrisponde alla regione gialla in figura.

Ad esempio quando  $W = 0$  sono accessibili tutti i punti della retta blu tratteggiata nella regione gialla. Se anche  $\Delta S = 0$  le temperature finali saranno quelle iniziali, oppure scambiate tra di loro, invece la massima produzione di entropia corrisponde a

$$T_{1f} = T_{2f} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

che è indicato in Figura 9.23 da un quadrato. Questo è ciò che si ottiene mettendo direttamente i corpi in contatto tra di loro e attendendo l'equilibrio.

All'aumentare di  $W$  la retta si sposta verso il basso: il massimo valore  $W = W_{MAX}$  corrisponde alla retta tangente all'iperbole, cioè a

$$T_{1f} = T_{2f} = \sqrt{T_1 T_2}$$

e

$$W_{MAX} = C \left( T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2} \right)$$

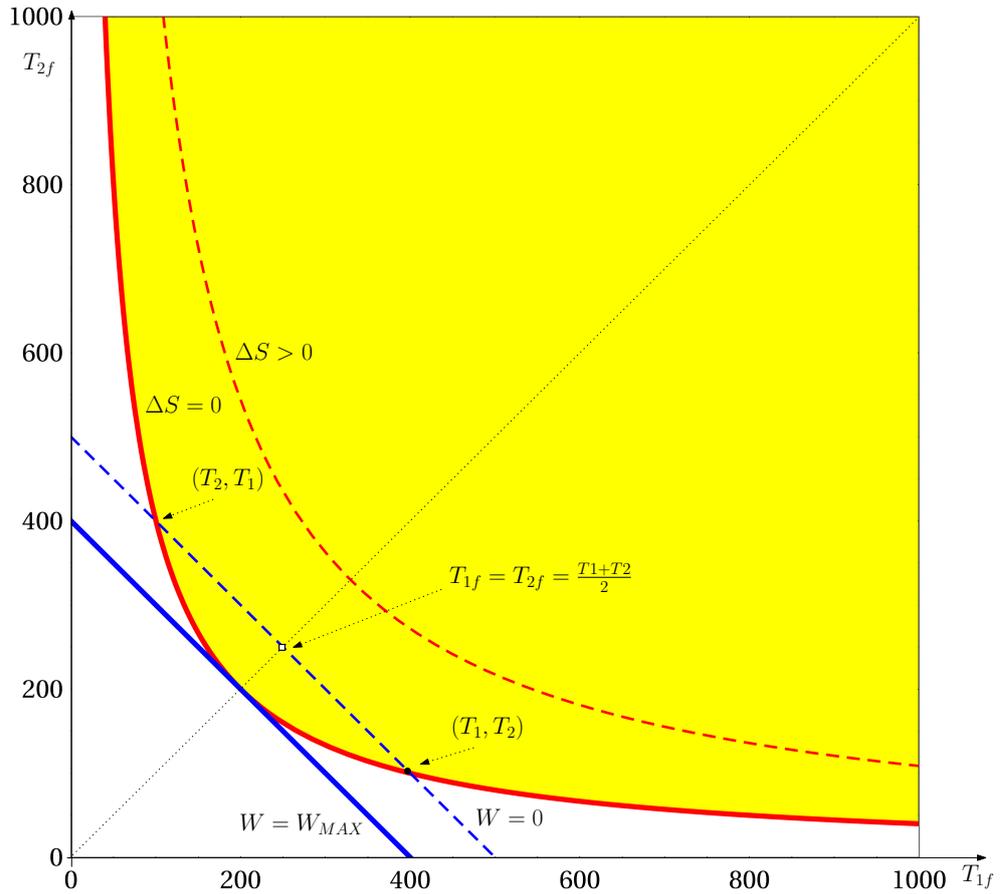


Figura 9.23.: Il piano corrispondente alle temperature finali  $T_{1f}$ ,  $T_{2f}$  dei due corpi. Si è scelto  $T_1 = 400$  e  $T_2 = 100$ . L'iperbole rossa unita corrisponde alle temperature finali accessibili in una trasformazione reversibile ( $\Delta S = 0$ ). Per una trasformazione qualsiasi  $\Delta S \geq 0$  e le temperature finali accessibili si trovano nella regione in giallo. Le rette blu corrispondono alle temperature finali accessibili per un dato lavoro estratto  $W$ .