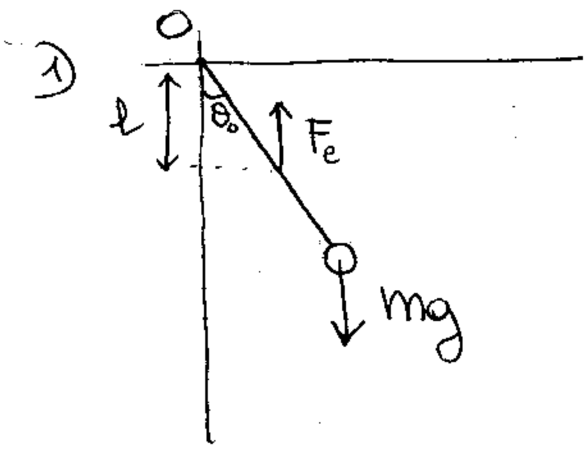
SOLUZIONI ESAME DI FISICA Geologia Aprile 2010

ESERCIZIO 1

1)



$\sum \tau = 0$
rispetto all'asse di rotazione posto nel punto O

ℓ = lunghezza della molla

$$\ell = \frac{L}{2}\cos\theta_0$$

$F_e = K\ell$ modulo della forza elastica

$$\Rightarrow \quad F_e \frac{\cancel{L}}{2} \cancel{\sin}\theta_0 - mg \cancel{L} \cancel{\sin}\theta_0 = 0$$

$$\frac{K\ell}{2} - mg = 0$$

$$\frac{K}{2} \cdot \frac{L}{2}\cos\theta_0 - mg = 0$$

$$\cos\theta_0 = \frac{4mg}{KL}$$

$$\boxed{\theta_0 = \arccos \frac{4mg}{KL}}$$

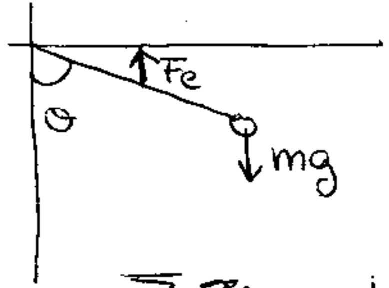
$$\Rightarrow \theta_0 = \arccos(0,654)$$

$\theta_0 = 49°$ con due cifre significative

2) $\sum \tau = I\alpha$

$I = mL^2$ momento d'inerzia della pallina rispetto al punto O

ℓ_1 = lunghezza della molla quando la sbarretta forma un angolo $\theta = 60°$



$$F_e = k\ell_1$$

con $\ell_1 = \frac{L}{2}\cos\theta$

$$\sum \tau = k\ell_1 \cdot \frac{L}{2}\sin\theta - mgL\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad k\frac{L^2}{4}\sin\theta\cos\theta - mgL\sin\theta = \sum\tau$$

$$L\sin\theta\left(\frac{kL}{4}\cos\theta - mg\right) = mL^2\alpha$$

$$\boxed{\alpha = \sin\theta\left(\frac{k}{4m}\cos\theta - \frac{g}{L}\right)}$$

$$\alpha = -10\ \frac{rad}{s^2}$$

3) Conservazione dell'energia meccanica:

$$E_i = E_f$$

$$E_i = -mgh_1 + \frac{1}{2}k\ell_1^2$$

$$E_f = -mgh + \frac{1}{2}k\ell^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

(ponendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale al livello di O)

$$-mgh_1 + \frac{1}{2}k\ell_1^2 = -mgh + \frac{1}{2}k\ell^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$-mgL\cos\theta + \frac{1}{2}k\frac{L^2}{4}\cos^2\theta = -mgL\cos\theta_0 + \frac{1}{2}k\frac{L^2}{4}\cos^2\theta_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) + \frac{1}{8}KL^2\left(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0\right)$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gL\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) + \frac{KL^2}{4m}\left(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0\right)}} \qquad (3)$$

$$v = \sqrt{0{,}0714}\ \frac{m}{s} \cong 0{,}27\ \frac{m}{s}$$ con due cifre significative

4) Dopo che la molla si è staccata, la pallina urta la parete con la quantità di moto $p_1 = m v_1$ (diretta verso sinistra)

con v_1 che si trova imponendo la conservazione dell'energia, tra l'istante t_0 e l'istante dell'urto t_1

$$E_0 = E_1$$

$$E_0 = -mgL\cos\theta_0 + \frac{1}{2}mv^2$$ → trovata nella domanda precedente

$$E_1 = -mgL + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow -mgL + \frac{1}{2}mv_1^2 = -mgL\cos\theta_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgL\left(1-\cos\theta_0\right)$$

$$v_1^2 = v^2 + 2gL\left(1-\cos\theta_0\right)$$

$$\Rightarrow p_1 = m\sqrt{v^2 + 2gL\left(1-\cos\theta_0\right)}$$

Prima dell'urto: Dopo l'urto

$\leftarrow\!\circ$ $\qquad\qquad$ $\circ\!\rightarrow$ (si inverte la direzione)

p_1 $\qquad\qquad$ p_1

Quindi $\Delta p = 2p_1$

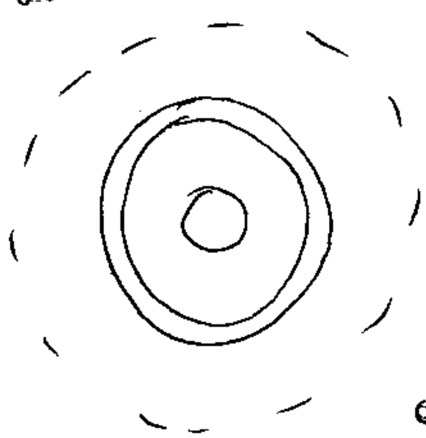
$$\boxed{\Delta p = 2m\sqrt{v^2 + 2gL(1-\cos\theta_0)}}$$

$$\Delta p = 0,119 \ Kg \cdot \frac{m}{s} \simeq 0,12 \ Kg\frac{m}{s}$$

con due cifre significative

ESERCIZIO 2

1) Considero una superficie Gaussiana sferica di raggio $r > C$



$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

poiché $\vec{E} = 0$ per $r > C$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = 0$$

quindi $q_{int} = 0$

Poiché $q_{int} = Q_1 + Q_2$

$$\Rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_2 = -Q_1}$$

$$Q_2 = -33 nC$$

2) Applico il teorema di Gauss a superfici sferiche di raggio r

$r < a$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

con $q_{int} = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

ρ_1 = densità di carica all'interno della sfera

$$\rho_1 = \frac{Q_1}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad \Rightarrow \quad q_{int} = Q_1 \cdot \frac{r^3}{a^3}$$

Inoltre per la simmetria sferica

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi \cancel{r^2} E = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{r^{\cancel{3}}}{a^3}$$

$$E = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{r}{a^3}$$

$$\boxed{\vec{E}_{I}(r) = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{r}{a^3} \cdot \hat{r}}$$

$a < r < b$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad \text{con } q_{int} = Q_1$$

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 E = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_{II}(r) = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

$b < r < c$

$\boxed{\vec{E}_{III} = 0}$ perché all'interno del conduttore

3) Nota che $V_B = V_C$ poiché tutti i punti del conduttore sono allo stesso potenziale

$$V_A - V_C = V_A - V_B = \int_A^B E_{II}(r)\,dr =$$

$$= \int_a^b \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \boxed{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

$$V_A - V_C = 12\,mV$$

4) Conservazione dell'energia meccanica + elettrostatica

$$E_A = qV_A$$

$$E_B = qV_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$qV_A = qV_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2q}{m}(V_A - V_B)}}$$

$$v_B = 9{,}9 \times 10^{-6}\,\frac{m}{s}$$

con due cifre significative