

①

1) Assioma della completezza: $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_0^1 (ax + \frac{1}{4}) dx = a \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \frac{1}{4} [x]_0^1 =$$

$$= a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

$$2a + 1 = 4$$

$$2a = 3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{5}{8}}$$

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot p(x) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{5}{8} \right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{64} \right) \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{15}{8}x^2 - \frac{5}{16}x + \frac{75}{128}x + \frac{25}{256} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{35}{128}x + \frac{25}{256} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - \frac{13}{8} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{35}{128} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \frac{25}{256} [x]_0^1 =$$

(2)

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{13}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{35}{128} \cdot \frac{1}{2} + \frac{25}{256} =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{13}{24} + \frac{35}{256} + \frac{25}{256} = \frac{96 + 35 + 25}{256} - \frac{13}{24} =$$

$$= \frac{156}{256} - \frac{13}{24} = \frac{13}{192}$$

$$\sigma^2 = \frac{13}{192}$$

2) Prob. di rispondere correttamente ad una domanda $p = \frac{1}{4} = \frac{\text{n° risposte corrette}}{\text{n° risposte possibili}}$

P = prob. di rispondere correttamente a 3, 4, oppure 5 domande. BINOMIALE

$$N = 5$$

$$K = 3, 4, 5$$

$$p = \frac{1}{4}$$

$$P = P(K=3) + P(K=4) + P(K=5)$$

$$P(K=3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-3} =$$

$$= \frac{5!}{3! 2!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{3^2}{4^5} =$$

$$= 10 \cdot \frac{9}{1024} = \frac{90}{1024}$$

$$P(K=4) = \frac{5!}{4! 1!} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} = 5 \cdot \frac{3}{1024} = \frac{15}{1024}$$

$$P(K=5) = \frac{5!}{5! 0!} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$$

$$P = \frac{90}{1024} + \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512}$$

$$P = \frac{53}{512} \approx 0,104$$

$$P \approx 10,4\%$$

③

3) Prob. di avere un oro in un singolo lancio $p = \frac{1}{6}$

$$P_1 = 1 - P(K=0)$$

$$N=6$$

$$P(K=0) = \frac{6!}{0!(6-0)!} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6 \quad K = \text{numero di successi (ori)}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,3349$$

$$P_1 = 1 - 0,3349$$

$$P_1 = 0,6651$$

$$P_2 = 1 - P(K=0) - P(K=1)$$

$$\text{con } N=12$$

$$P(K=0) = \frac{12!}{0!12!} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12} = \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 0,1122$$

$$P(K=1) = \frac{12!}{0!11!} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0,2692$$

$$P_2 = 1 - 0,1122 - 0,2692$$

$$P_2 = 0,6186$$

È quindi più probabile avere almeno un oro in 6 lanci che almeno due ori in 12 lanci.

4) Poisson $\mu = 1,5$

Poiché $\sigma^2 = \mu$ si ha che $\sigma^2 = 1,5$

La probabilità che nessuna torretta venga usata (in un giorno) è: $P(0)$ con

$$P(K) = \frac{\mu^K}{K!} e^{-\mu}$$

$$P(0) = \frac{1,5^0}{0!} e^{-1,5} = e^{-1,5} = 0,223$$

$$P(0) \cdot 100 \approx 22$$

La probabilità di rifiutare un foscoba è = alla (4)
prob. che le richieste siano più di due

$$P = P(K > 2) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$$

$$P(0) = 0,223$$

$$P(1) = \frac{1,5^1}{1!} e^{-1,5} = 1,5 \cdot 0,223 = 0,334$$

$$P(2) = \frac{1,5^2}{2!} e^{-1,5} = 1,125 \cdot 0,223 = 0,251$$

$$P = 1 - 0,223 - 0,334 - 0,251 = 0,189$$

$$P \cdot 100 \approx 19$$

Quindi considerando 100 giorni di lavoro
mi aspetto che:

nessun foscoba venga rifiutato
alcune richieste vengano rifiutate

≈ 22 volte
≈ 19 volte

5) $\mu = 4$ $\sigma = 2$

$$P(4-a \leq x \leq 4+a) = 0,5934$$

$$P(4-a \leq x \leq 4+a) = \int_{4-a}^{4+a} p(x) dx = \quad \text{con } p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} g(z) dz =$$

$$z_1 = \frac{4-a-\mu}{\sigma} = -\frac{a}{2}$$

$$z_2 = \frac{4+a-\mu}{\sigma} = \frac{a}{2}$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} g(z) dz = 2 \int_0^{a/2} g(z) dz = 0,5934$$

$$\Rightarrow \int_0^{a/2} g(z) dz = 0,2967$$

Guardando le tabelle si ha $\frac{a}{2} = 0,83$

$a = 1,66$

6) $m = 48$
 $s = 5$ } noto che poiché il campione è costituito da solo 15 elementi, devo considerare la distribuzione della t di Student
 $N = 15$
 ricavata dalle 15 misure

$$m - t_{crit} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq m + t_{crit} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$$

con $t_{crit} = 2,145$

con 14 gradi di libertà

$$48 - 2,145 \cdot \frac{5}{\sqrt{15}} \leq \mu \leq 48 + 2,145 \cdot \frac{5}{\sqrt{15}}$$

$$48 - 2,77 \leq \mu \leq 48 + 2,77$$

$$45,23 \leq \mu \leq 50,77$$

7) Metodo di fit dei minimi quadrati

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0	8,5	0	0
1	5,5	1	5,5
2	3,3	4	6,6
3	2,5	9	7,5
$\sum$ 6	19,8	14	19,6

$N = 4$ $\Delta y = 0,5$

$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}$$

$$\Delta = N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$$

$$\Delta = 4 \cdot 14 - 6^2 = 56 - 36 = 20$$

$$A = \frac{19,8 \cdot 14 - 6 \cdot 19,6}{20} = \frac{159,6}{20} = 7,98$$

$$(\Delta A)^2 = (\Delta y)^2 \cdot \frac{\sum x_i^2}{\Delta} = (0,5)^2 \cdot \frac{14}{20} = 0,175$$

$$\Delta A = 0,418 \approx 0,4$$

$$A = 8,0 \pm 0,4$$

$$B = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}$$

6

$$B = \frac{4 \cdot 19,6 - 6 \cdot 19,8}{20} = - \frac{40,4}{20} = - 2,02$$

$$(\Delta B)^2 = (\Delta y)^2 \cdot \frac{N}{\Delta} = (0,5)^2 \cdot \frac{4}{20} = 0,05$$

$$\Delta B = 0,224 \approx 0,22$$

$$B = -2,02 \pm 0,22$$

8)

x_i	y_i	$f(x_i)$	$y_i - f(x_i)$	con $f(x_i) = A + Bx_i$
0	8,5	8	0,5	$f(x_i) = 8 - 2,02 \cdot x_i$
1	5,5	5,98	-0,48	
2	3,3	3,96	-0,66	
3	2,5	1,94	0,56	

$$\chi_0^2 = \frac{\sum (y_i - f(x_i))^2}{(\Delta y)^2} = \frac{(0,5)^2 + (-0,48)^2 + (-0,66)^2 + (0,56)^2}{(0,5)^2}$$

$$\chi_0^2 = \frac{1,2296}{0,25} = 4,92$$

$$d = 4 - 2 = 2 \text{ gradi di libertà} \quad \chi_0^2 = \frac{4,92}{2} \approx 2,46$$

$$P_2(\chi^2 \geq 2,46) = 8,2\%$$

Quindi l'ipotesi è accettabile.