

$$1) \rho = \frac{m}{L^3}$$

Supponendo che gli errori su m e su L siano indipendenti

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left[\frac{\Delta(L^3)}{(L^3)}\right]^2}$$

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0,1}{3,5} = 0,02857$$

$$\frac{\Delta(L^3)}{(L^3)} = 3 \frac{\Delta L}{L} = 3 \cdot \frac{0,1}{11,2} = 0,02679$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{(0,02857)^2 + (0,02679)^2} = 0,03917$$

$$\rho = \frac{3,5 \text{ Kg}}{(0,112)^3 \text{ m}^3} = 2491,2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Delta \rho = (2491,2 \cdot 0,03917) \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = 97,6 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Delta \rho = 100 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \quad \text{errore con 1 sola cifra significativa}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = (2500 \pm 100) \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}} = (2,5 \pm 0,1) \cdot 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$2) y = \frac{x}{x+2}$$

$$y = f(x)$$

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \cdot \Delta x$$

formula generale

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+2} - \frac{x}{(x+2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cancel{x+2} - \cancel{x}}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{2}{(x+2)^2} \Delta x$$

NOTA CHE SE AVESSI APPLICATO LA FORMULA DELLA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI PER UN QUOTIENTE AUREI TROVATO UN RISULTATO ERRATO, POICHÉ NUMERATORE E DENOMINATORE NON SONO INDIPENDENTI (sono entrambi) funzioni di x .
VERIFICA:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta(x+2)}{x+2}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta x}{x+2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \right) \Delta x$$

$$\Delta y = y \left(\frac{x+2+x}{x(x+2)} \right) \Delta x$$

$$\Delta y = \frac{\cancel{x}}{x+2} \cdot \frac{2x+2}{\cancel{x}(x+2)} \Delta x$$

$$\Delta y = \frac{2x+2}{(x+2)^2} \Delta x$$

che non coincide con il risultato corretto trovato sopra

$$3) T_{\text{best}} = 2,500 \text{ s}$$

$$\Delta T_{\text{tot}} = \sqrt{(\Delta T_{\text{statistico}})^2 + (\Delta T_{\text{sistematico}})^2}$$

$$\text{con } \Delta T_{\text{statistico}} = 0,028 \text{ s}$$

$$\Delta T_{\text{sistematico}} = 0,01 T_{\text{best}} = 0,025 \text{ s}$$

$$\Delta T_{\text{tot}} = \sqrt{(0,028)^2 + (0,025)^2} \text{ s} = 0,037 \text{ s}$$

$$\Rightarrow (2,50 \pm 0,04) \text{ s}$$

4) Approssimazione gaussiana della distribuzione binomiale $P(K \geq 14, N)$ (3)

$\mu = Np$ $N = 100$ $p = \frac{1}{6}$

$\mu = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16.7$

$\sigma = \sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{500}}{6} = 3.73$

$P = \int_{13.5}^{+\infty} p(x) dx =$ con $p(x) =$ gaussiana di media μ e dev. stand. σ

$= \int_{z_1}^{+\infty} g(z) dz$ con $g(z)$ gaussiana standard
e $z_1 = \frac{13.5 - 16.7}{3.73} = -0.86$

$P = \int_{-0.86}^{+\infty} g(z) dz = \int_{-0.86}^0 g(z) dz + 0.5 = \int_0^{0.86} g(z) dz + 0.5 =$

$= 0.3051 + 0.5 = 0.8051$

$P \approx 80\%$

5)

274 ± 6

54.48 ± 0.22

3800 ± 500

$(3.8 \pm 0.5) \cdot 10^3$

78000 ± 3000

22.22 ± 0.05

280 ± 40

$(2.8 \pm 0.4) \cdot 10^2$

6) $N=3$ Binomiale

$P = \frac{1}{6}$ per e' usate di una qualunque faccia

A si realizza in 6 modi diversi: possiamo usare 3 volte "1", oppure 3 volte "2", e così via

(A) $\begin{matrix} 111 \\ 222 \\ 333 \\ 444 \\ 555 \\ 666 \end{matrix}$
 $P(111) = P(1) \cdot P(1) \cdot P(1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$
 (4)

essendo i tre
 lanci indipendenti

Dunque $P(111) = P(222) = P(333) = \dots = P(666) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$
 Quindi $P(A) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$

$$P(A) = \frac{1}{36}$$

B = faccia "6" in almeno due lanci

$N = 3$

$P = \frac{1}{6}$

$K = 2, K = 3$

$$P(K=2, N=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \frac{3!}{2! 1!} = \frac{5}{6^3} \cdot 3 = \frac{5}{72}$$

$$P(K=3, N=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 \frac{3!}{3! 0!} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

$$P(B) = \frac{5}{72} + \frac{1}{216} = \frac{15+1}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$$

$$P(B) = \frac{2}{27}$$

7) $P(B/A)$ = probabilità che si verifichi B sapendo che si è verificato A

$$P(B/A) = \frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}} = \frac{1}{6}$$

ovvero le tre usate
 la sequenza 666

6 sequenze
 diverse
 111
 222
 ...

Poiché $P(B/A) \neq P(B)$ si ha che A e B sono due eventi DIPENDENTI (5)

8) $\mu = 18 \text{ cm}$

$$P(X \leq 18,7) = \int_{-\infty}^{18,7} p(x) dx = 0,94$$

con $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{18,7 - 18}{\sigma} = \frac{0,7}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{z_1} g(z) dz = 0,94$$

con $g(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$
gaussiana standard

ovvero

$$0,5 + \int_0^{z_1} g(z) dz = 0,94$$

$$\int_0^{z_1} g(z) dz = 0,94 - 0,50 = 0,44$$

Guardando le tabelle si ha che $z_1 \approx 1,56$

$$\Rightarrow 1,56 = \frac{0,7}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{0,7}{1,56}$$

$\sigma = 0,45 \text{ cm}$

9) Deve essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

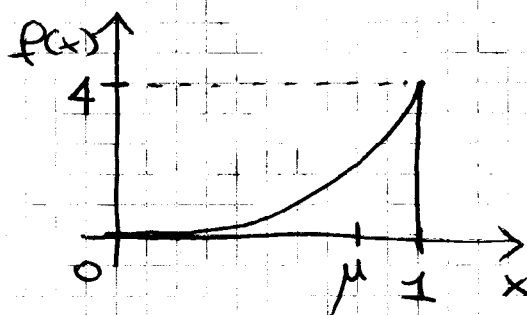
ossia la della
completezza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 3ax^3 dx = 3a \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3a}{4} \stackrel{\text{e lo impongo}}{=} 1 \quad (6)$$

quindi $\boxed{a = \frac{4}{3}}$ $\rightarrow f(x) = 4x^3 \quad 0 \leq x \leq 1$

10) $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx = 4 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{5}$

$$\boxed{\mu = \frac{4}{5}}$$



$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 \cdot 4x^3 dx = \frac{2}{75} \quad (\text{dopo molti calcoli...})$$

nota che $\sigma^2 = E[x^2] - \mu^2$

con $E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 4x^3 dx =$

$$= 4 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{50 - 48}{75} = \frac{2}{75}$$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{2}{75}}$$

$$11) m = \frac{2,6 + 2,4 + 2,1 + 2,6 + 2,8 + 2,5}{6} = \frac{\sum T_i}{N} = 2,5 \quad (7)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \mu)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum (T_i - 2,5)^2}{5}} =$$

$$s = \sqrt{\frac{(0,1)^2 + (-0,1)^2 + (-0,4)^2 + (0,1)^2 + (0,3)^2 + (0)^2}{5}} = \sqrt{\frac{0,28}{5}}$$

$$s = 0,2366$$

$$\frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{0,2366}{\sqrt{6}} = 0,0966$$

t di student $N-1 = 5$ gradi di libertà

$$m - t_{crit} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq m + t_{crit} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$$

con $t_{crit} = 2,571$ dalla tabella

$$t_{crit} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} = 2,571 \cdot 0,0966 = 0,248 \approx 0,25$$

$$2,5 - 0,25 \leq \mu \leq 2,5 + 0,25$$

$$\boxed{2,25 \leq \mu \leq 2,75}$$

12) Considero la variabile $\bar{x}$ che corrisponde alla media su 25 unità

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{25}}{25}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \mu_x = 1,2 \\ \sigma_x^2 = 0,05 \end{matrix}}$$

$\bar{x}$ ha distribuzione gaussiana (per il teorema dei grandi numeri) e ha media

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x = 1,2$$

e varianza $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N} \sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{0,05}}{\sqrt{25}}$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0,045$$

$$1,25$$

gaussiana di
media $\mu_{\bar{x}}$
e dev. standard $\sigma_{\bar{x}}$ (8)

$$P(1,21 \leq \bar{x} \leq 1,25) = \int_{1,21}^{1,25} p(y) dy = \quad (y = \bar{x})$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} g(z) dz$$

$$\text{con } z_1 = \frac{1,21 - 1,20}{0,045} = 0,22$$

$$z_2 = \frac{1,25 - 1,20}{0,045} = 1,11$$

$$= \int_{0,22}^{1,11} g(z) dz = \int_0^{1,11} g(z) dz - \int_0^{0,22} g(z) dz = 0,3665 - 0,0871$$

$\Rightarrow$

$$P = 0,2794$$

$$P \approx 28\%$$

13) Applico il metodo di fit dei minimi quadrati
N=3

x_i	y_i	Δy_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	7,5	0,5	1	7,5
1,5	9,2	0,5	2,25	13,8
2	11	0,5	4	22
$\sum x_i$	4,5		7,25	43,3

$$7,5 = 1 \cdot 7,5$$

$$13,8 = 1,5 \cdot 9,2$$

$$22 = 2 \cdot 11$$

ovvero

$$\sum x_i = 4,5$$

$$\sum y_i = 27,7$$

$$\sum x_i^2 = 7,25$$

$$\sum x_i y_i = 43,3$$

$$A = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{\Delta}$$

Δ

$$\text{eqn } \underline{\Delta} = \frac{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}{\Delta} \quad (9)$$

$$\underline{\Delta} = 3 \cdot 7,25 - (4,5)^2 = 1,5$$

$$A = \frac{27,7 \cdot 7,25 - 4,5 \cdot 43,3}{1,5} = 3,9833$$

$$(\Delta A)^2 = (\Delta y)^2 \frac{(\sum x_i^2)}{\underline{\Delta}} = (0,5)^2 \cdot \frac{7,25}{1,5} = 1,208$$

$$\Delta A = \sqrt{1,208} = 1,1$$

$$A = 4,0 \pm 1,1$$

$$B = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\underline{\Delta}}$$

$$B = \frac{3 \cdot 43,3 - 4,5 \cdot 27,7}{1,5} = 3,5$$

$$(\Delta B)^2 = (\Delta y)^2 \frac{N}{\underline{\Delta}}$$

$$(\Delta B)^2 = (0,5)^2 \cdot \frac{3}{1,5} = 0,50$$

$$\Delta B = \sqrt{0,5} = 0,71$$

$$B = 3,5 \pm 0,7$$

14)

x_i	y_i	$f(x_i)$
1	7,5	7,5
1,5	9,2	9,25
2	11	11

$$\text{eqn } f(x_i) = A + B x_i$$

$$f(x_i) = 4,0 + 3,5 \cdot x_i$$

$$\chi_o^2 = \sum_i \frac{(y_i - f(x_i))^2}{(\Delta y)^2}$$

$y_i - f(x_i)$
0
-0,05
0

$$\chi_0^2 = \frac{(-0,05)^2}{(0,5)^2}$$

10

⇒

$$\chi_0^2 = 0,01$$

Per calcolare il chi quadro ridotto, si ha che il numero di gradi di libertà $\bar{d} = 3 - 2 = 1$

N ↙

↘ ho calcolato
A e B
dai dati

$$\Rightarrow \tilde{\chi}_0^2 = \frac{1}{d} \chi_0^2$$

$$\tilde{\chi}_0^2 = 0,01 \quad \left(\begin{array}{l} \text{nota che poiché } \chi_0^2 \ll d \\ \text{la distribuzione attesa e quella osservata} \\ \text{si accordano bene} \end{array} \right)$$

Per giudicare la bontà dell'ipotesi fatta devo calcolare

$$P_1(\tilde{\chi}^2 \geq 0,01) \approx 92\%$$

↑
lo trovo guardando le tabelle del $\tilde{\chi}^2$

Si tratta di una probabilità alta, quindi l'ipotesi fatta (cioè che le variabili soddisfanno la relazione $y = A + Bx$) può essere accettata.

Ponendo la ^{del} SOGLIA valore di accettazione al 5%

poiché $(92\%) > (5\%)$, l'ipotesi può essere accettata.

Notate che la probabilità trovata è così vicina al 100% da destare sospetti. Quando risulta maggiore dell'85%, infatti, si pensa che i risultati della misura siano stati "truccati" per riprodurre la teoria attesa.