

$$1) \rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(R^3)}{(R^3)}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{3\Delta R}{R}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{5}{100}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{0,1}{2}\right)^2} = \sqrt{0,025} = 0,1581$$

$$\rho = \frac{3 \cdot 100}{4\pi \cdot 2^3} \frac{g}{cm^3} = 2,984 \frac{g}{cm^3}$$

$$\Delta \rho = 2,984 \cdot 0,1581 = 0,472 \frac{g}{cm^3}$$

$$\Rightarrow \rho = (3,0 \pm 0,5) \frac{g}{cm^3}$$

$$2) \quad 85500 \pm 500$$

$$(8,55 \pm 0,05) \cdot 10^4$$

$$365,32 \pm 0,05$$

$$(3,6532 \pm 0,0005) \cdot 10^2$$

$$123 \pm 27$$

$$(1,23 \pm 0,27) \cdot 10^2$$

$$230 \pm 70$$

$$(2,3 \pm 0,7) \cdot 10^2$$

$$15,55 \pm 0,09$$

$$(1,555 \pm 0,009) \cdot 10^1$$

$$65,001 \pm 0,011$$

$$(6,5001 \pm 0,0011) \cdot 10^1$$

$$3) \quad p(x) = 2x + a$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (2x + a) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + a [x]_0^1 = 1 + a$$

$$1 + a = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$4) \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx \quad (2)$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \boxed{\mu = \frac{2}{3}}$$

$$5) \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2x dx =$$

$$= 2 \int_0^1 x \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) dx = \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x\right) dx =$$

$$= 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - \frac{8}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{8}{9} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9 - 16 + 8}{18} = \frac{17 - 16}{18} \quad \boxed{\sigma^2 = \frac{1}{18}}$$

6) Le due estrazioni costituiscono due eventi indipendenti.

$$P(B \text{ e } B) = P(B) \cdot P(B)$$

$$P(B) = \frac{\text{u° con favorevoli}}{\text{u° con possibili}} = \frac{2}{7}$$

$$P(B \text{ e } B) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \approx 0,082$$

$$P \approx 8,2\%$$

$$7) N = 100$$

$$\bar{x} = 15,3348$$

$$\sigma_x = 0,24$$

La migliore stima del diametro della sferetta

è la media campionaria $\bar{x}$.

(3)

L'errore associato alla media è la deviazione standard della media $\sigma_{\bar{x}}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \frac{0,23}{\sqrt{100}} = 0,023$$

$$\Rightarrow \boxed{15,335 \pm 0,023} \text{ mm}$$

$$8) \mu = 0,4 \quad \sigma_x = \sqrt{0,04} = 0,2 \quad N = 50$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \frac{0,2}{\sqrt{50}} = 0,028$$

$$P(0,41 \leq \bar{x} \leq 0,43) = \int_{0,41}^{0,43} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\bar{x}}} e^{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma_{\bar{x}}^2}} d\bar{x} =$$

$$z_1 = \frac{0,41 - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{0,41 - 0,40}{0,028} = 0,357 \approx 0,36$$

$$z_2 = \frac{0,43 - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{0,43 - 0,40}{0,028} = 1,071 \approx 1,07$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} g(z) dz = \int_{0,36}^{1,07} g(z) dz = \int_0^{1,07} g(z) dz - \int_0^{0,36} g(z) dz =$$

$$\text{con } g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$= 0,3577 - 0,1406 = 0,2171$$

$$\boxed{P \approx 0,22}$$

$$9) m = 0,4$$

$$\sigma = \sqrt{0,04} = 0,2$$

Poiché la deviazione standard è nota,

(4)

$$m - A \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq m + A \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

con $A = 2,58$

m ha una distribuzione gaussiana di media μ e deviazione standard $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

(nota che qui non devo considerare la distribuzione delle t di Student perché la deviazione standard σ della popolazione è nota)

$$0,4 - 2,58 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{15}} \leq \mu \leq 0,4 + 2,58 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{15}}$$

$$0,40 - 0,13 \leq \mu \leq 0,4 + 0,13$$

$$\boxed{0,27 \leq \mu \leq 0,53}$$

10) Metodo di fit del minimo χ^2 .

Nel caso $y = A$ coincide con la media pesata.

$$A = \frac{\sum_i \frac{y_i}{(\Delta y_i)^2}}{\sum_i \frac{1}{(\Delta y_i)^2}} = \frac{\frac{5,4}{(0,4)^2} + \frac{5,3}{(0,6)^2} + \frac{5,2}{(0,2)^2} + \frac{5}{(0,3)^2}}{\frac{1}{(0,4)^2} + \frac{1}{(0,6)^2} + \frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,3)^2}}$$

$$= \frac{33,75 + 14,72 + 130 + 55,55}{45,14} = \frac{234,02}{45,14} = 5,184$$

$$\Delta A = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \frac{1}{(\Delta y_i)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{45,15}} = 0,149 \approx 0,15 \quad (5)$$

$$A = 5,18 \pm 0,15$$

11)

y_i	$f(x_i) = A$	$(y_i - f(x_i))^2$	$(\Delta y_i)^2$
5,4	5,18	0,0484	0,16
5,3	5,18	0,0144	0,36
5,2	5,18	0,0004	0,04
5,0	5,18	0,0324	0,09

$$\chi_o^2 = \sum_i \frac{(y_i - f(x_i))^2}{(\Delta y_i)^2} = \frac{0,0484}{0,16} + \frac{0,0144}{0,36} + \frac{0,0004}{0,04} + \frac{0,0324}{0,09} =$$

$$\chi_o^2 = 0,807$$

$d = 4 - 1 = 3$ gradi di libertà

$$\tilde{\chi}_o^2 = \frac{0,807}{3} = 0,269$$

$P_3(\tilde{\chi}^2 \geq 0,269) \approx 80\%$ guardando le tabelle.

L'ipotesi fatta è accettabile.