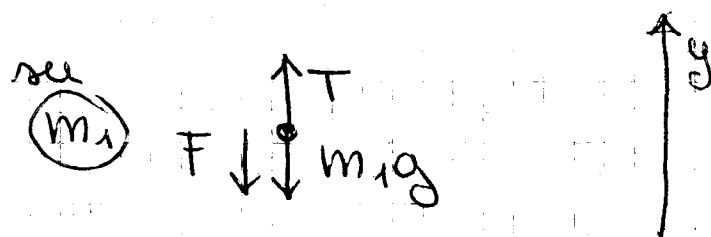
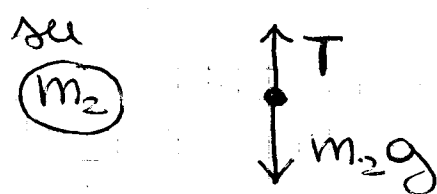


ESERCIZIO 1

1) All'equilibrio tutto è fermo e la tensione della fune è uguale in tutti i punti $= T$



F = modulo della forza elastica, che è diretta verso il basso in quanto la molla è allungata e "tira" verso il basso.

$$F = k \Delta$$

$$\begin{cases} T - m_2 g = 0 \\ T - m_1 g - k \Delta = 0 \end{cases} \rightarrow$$

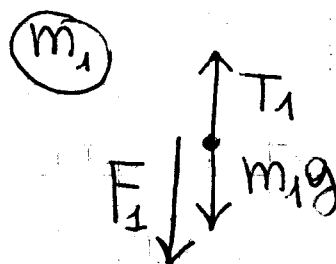
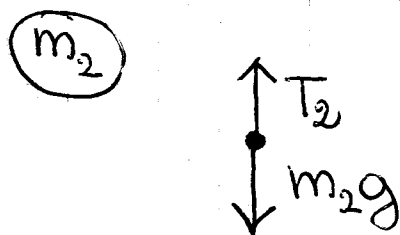
$$T = m_2 g$$

$$m_2 g - m_1 g - k \Delta = 0$$

$$\Delta = \frac{(m_2 - m_1)g}{k}$$

$$\Delta = 0,196 \text{ m} = 20 \text{ cm} \quad (2 \text{ cifre signif.})$$

2) Diagrammi di corpo libero:

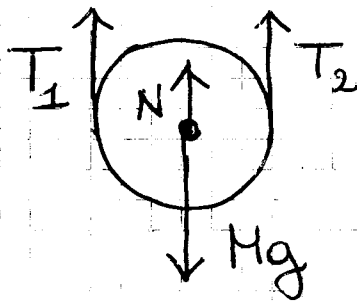


$$\text{con } F_1 = k(\Delta + h)$$

in quanto la molla n è ulteriormente allungata di h

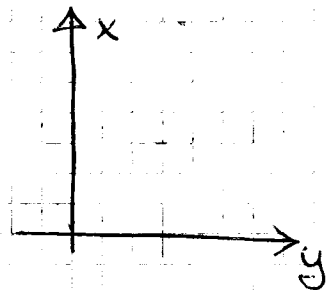
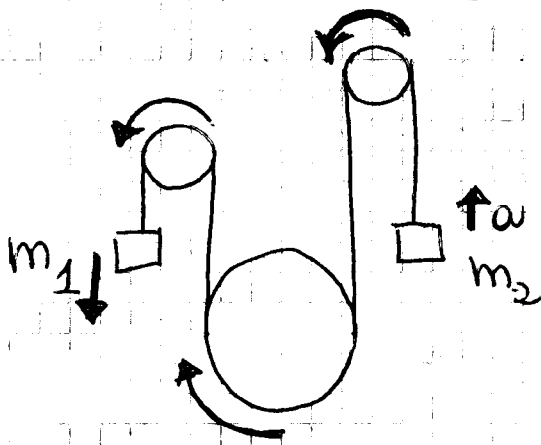
corrucciola

(M)



Le due carrucole (2) senza massa devono solamente la direzione della fune.

Poiché m_1 e m_2 sono collegate da un filo inestensibile hanno la stessa accelerazione (in modulo), m_2 verso l'alto ed m_1 verso il basso.



$$\Rightarrow \begin{cases} T_2 - m_2 g = m_2 a \\ T_1 R - T_2 R = I \alpha \\ -m_1 g - K(\Delta + h) + T_1 = -m_1 a \end{cases} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{II}^a \text{ eq. cardinale} \\ \text{rispetto} \\ \text{al C.M.} \\ \text{per la carrucola} \\ \text{di massa } M \end{array}$$

con $I = \frac{1}{2} M R^2$ e $\alpha = \frac{a}{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_2 = m_2 g + m_2 a \\ T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M a \\ T_1 = m_1 g + K(\Delta + h) - m_1 a \end{cases}$$

Da cui:

(3)

$$m_1 g + K(\Delta + R) - m_1 a - m_2 g - m_2 a = \frac{1}{2} M a$$

$$(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M) a = m_1 g - m_2 g + K(\Delta + R)$$

Sostituendo a Δ il valore trovato nel punto 1)

$$(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M) a = \cancel{m_1 g} - \cancel{m_2 g} + (\cancel{m_2 - m_1}) g + K R$$

$$a = \frac{K R}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M}$$

$$a = 3,125 \frac{m}{s^2} \quad a = 3,1 \frac{m}{s^2} \quad (\text{con 2 cifre signif.})$$

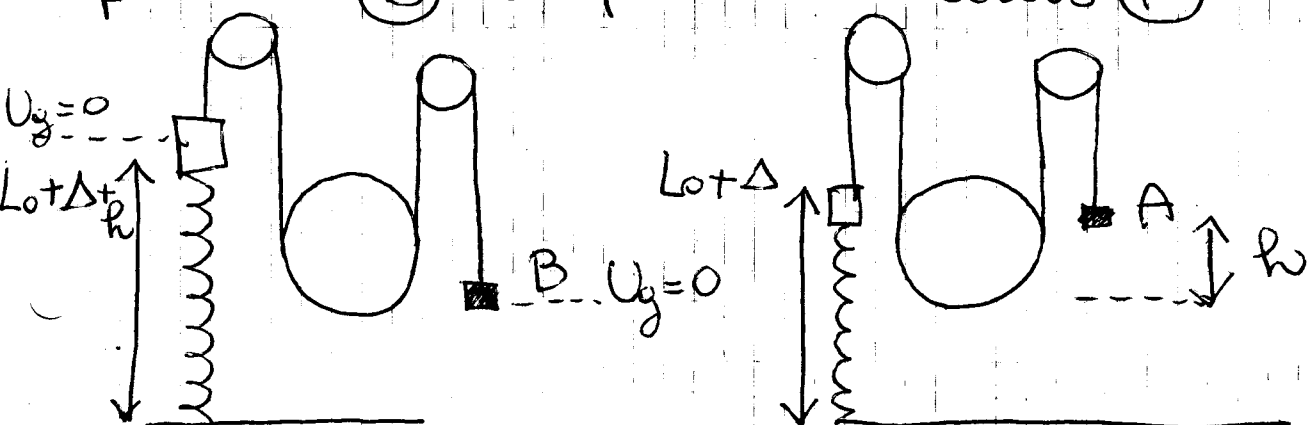
3) Quando m_2 passa per il punto A possiede accelerazione $a = \phi$ per cui

$$\sum \vec{F} = m_2 \vec{a}$$

ma la posizione A è di equilibrio, quindi

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \phi$$

Per calcolare v_A sfruttando la conservazione dell'energia meccanica tra il punto di partenza (B) e quello di arrivo (A)



$$E_{\textcircled{B}} = E_{\textcircled{A}}$$

(4)

$$E_B = \frac{1}{2} K (\Delta + R)^2$$

$$E_A = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} K \Delta^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m_2 g R - m_1 g R$$

nota che m_1 e m_2 possiedono la stessa velocità perché sono collegati da un filo inestensibile in tensione.

Inoltre l'energia potenziale gravitazionale di m_2 cresce passando da B ad A perché la massa sale; il contrario per m_1 .

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \text{perché tra filo e carucola non vi è slittamento}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} M v^2$$

$$\Rightarrow E_A = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M) v^2 + \frac{1}{2} K \Delta^2 + (m_2 - m_1) g R$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2 + \frac{M}{2}) v^2 + \frac{1}{2} K \Delta^2 + (m_2 - m_1) g R = \frac{1}{2} K (\Delta + R)^2$$

Sviluppando e semplificando:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2 + \frac{M}{2}) v^2 + \cancel{(m_2 - m_1) g R} = K \Delta R + \frac{1}{2} K R^2$$

$$\cancel{(m_2 - m_1) g R}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2 + \frac{M}{2}) v^2 = \frac{1}{2} K R^2$$

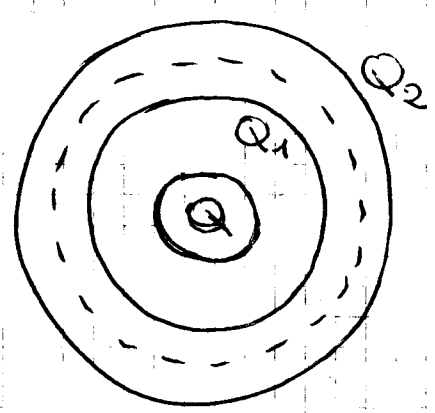
$$V = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}} \cdot h$$

$$V = 0,559 \frac{m}{s}$$

$$V = 56 \frac{cm}{s} \quad (2 \text{ cifre signif.})$$

ESERCIZIO 2

- 1) Il campo elettrico all'interno del conduttore deve essere $= \phi$.



Simmetria sferica

Teorema di Gauss applicato ad una superficie sferica di raggio r con

$$R_1 < r < R_2$$

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E$$

per la simmetria sferica del problema

ma $E = \phi$ dentro il conduttore $\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \phi$

Quindi per il teo di Gauss $q_{int} = \phi$

$$q_{int} = Q + Q_1$$

$$\Rightarrow Q + Q_1 = 0$$

$$\boxed{Q_1 = -Q}$$

$$Q_1 = -3,0 \text{ nC}$$

Poiché il guscio conduttore è scarico, $Q_1 + Q_2 = 0$

$$\Rightarrow Q_2 = -Q_1 \text{ ovvero } \boxed{Q_2 = Q}$$

$$Q_2 = 3,0 \text{ nC}$$

$$2) \quad \Phi(\vec{E}) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

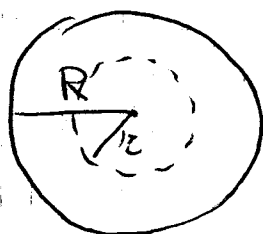
6

con $\Phi(\vec{E}) = \text{flusso attraverso una sfera di raggio } r$

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) \quad \text{a causa della simmetria sferica}$$

$$\text{caso } 0 < r < R \rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

con $q_{\text{int}} = \text{carica contenuta dentro la sfera di raggio } r$



$$q_{\text{int}} : \frac{4\pi r^3}{3} = Q : \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$q_{\text{int}} = \frac{Q \cdot \frac{4\pi r^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = Q \frac{r^3}{R^3}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 R^3}$$

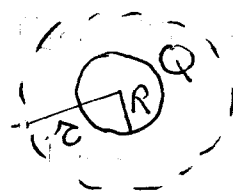
$$\boxed{E_{\text{I}}(r) = \frac{Q r}{4\pi \epsilon_0 R^3}}$$

$\vec{E}(r) = E(r) \hat{r}$
campo radiale

caso $R < r < R_1 \rightarrow q_{\text{int}} = Q$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E_{\text{II}}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}}$$

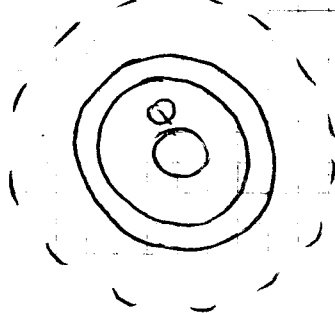


Caso $R_1 < r < R_2$ siamo all'interno del conduttore, quindi

$$\boxed{E_{\text{III}}(r) = 0}$$

Con $r > R_2$

$q_{int} = Q$ ← poiché il conduttore è sferico



(7)

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E_{IV}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}}$$

$$3) \Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}(r) d\vec{r} = \int_A^B E_{II}(r) dr =$$

questo è il campo elettrico tra A e B

$$= \int_R^{R_1} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int_R^{2R} \frac{1}{r^2} dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{2R} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \right)$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 R}}$$

$$\Delta V = 423,7 \text{ V}$$

$$\Delta V = 420 \text{ V} = 4,2 \cdot 10^2 \text{ V}$$

(2 cifre signific.)

4) All'equilibrio elettrostatico il campo elettrico dentro il conduttore deve essere $= 0$ quindi non varia

$$Q_1' = Q_1 = -Q$$

$$\boxed{Q_1' = -Q} \quad Q_1' = -3,0 \text{ nC} \quad (8)$$

Poiché il conduttore è collegato a massa il suo potenziale diventa $= \phi$.

$$V_B' = 0$$

con
$$V_B' = - \int_{\infty}^{R_2} \underbrace{E_{IV}'(r)}_{\substack{\text{nuovo valore} \\ \text{del campo per} \\ r > R_2}} dr$$

$$E_{IV}'(r) = \frac{q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

con $q_{int} = Q + Q_1' + Q_2' = Q_2'$

poiché $V_B' = 0 \Rightarrow V_B' = \frac{q_{int}}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0$

quindi $q_{int} = 0 \Rightarrow \boxed{Q_2' = 0}$

cioè la carica che era presente sulla faccia esterna del conduttore si scarica a terra, mentre quella che era sulla faccia interna rimane invariata.

5) Quando il conduttore viene collegato alla batteria il suo potenziale diventa uguale a $\mathcal{E}$

$$V_B'' = \mathcal{E}$$

con
$$V_B'' = - \int_{\infty}^{R_2} E_{IV}''(r) dr = - \int_{\infty}^{R_2} \frac{q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

con $q_{int} = Q + Q_1'' + Q_2''$ ⑨

inoltre anche in questo caso $Q_2'' = -Q$
 in modo che il campo
 elettrico all'interno del conduttore sia $= 0$.

$\rightarrow q_{int} = Q_2''$

$\Rightarrow \mathcal{E} = - \int_{\infty}^{R_2} \frac{Q_2''}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$

con $R_2 = 3R$

$\mathcal{E} = - \frac{Q_2''}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{3R}$

$\mathcal{E} = \frac{Q_2''}{12\pi\epsilon_0 R}$

$\Rightarrow Q_2'' = 12\pi\epsilon_0 R \mathcal{E}$

$Q_2'' = 2,0 \text{ nC}$