

①

ESERCIZIO 1

- 1) Poiché l'urto è elastico, si conserva l'energia cinetica totale del sistema $m+M$, quindi E_{tot} si conserva.

Poiché il vagone è vincolato a scorrere solo lungo l'asse x (esso non può variare la sua coordinata y , che deve essere sempre $=0$)

$P_{\text{tot}y}$ non si conserva (infatti prima dell'urto è negativa e dopo l'urto, poiché la pallina rimbalza verso l'alto è positiva)

Invece $P_{\text{tot}x}$ si conserva perché lungo x i due corpi sono liberi di muoversi.

Poiché una delle due componenti del vettore quantità di moto non si conserva, si ha che $\vec{P}_{\text{tot}}$ non si conserva

- 2) Utilizzando la conservazione di $P_{\text{tot}x}$ e E_{tot} ed il fatto che $P_{\text{tot}y}$ durante l'urto cambia segno (come per una pallina che rimbalza sul pavimento) si ha:

Prima dell'urto:
$$\begin{cases} E_{\text{tot}}^{\text{①}} = \frac{1}{2} m v_0^2 \\ P_{\text{tot}x}^{\text{①}} = m v_0 \cos \alpha \\ P_{\text{tot}y}^{\text{①}} = -m v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Dopo l'urto:
$$\begin{cases} E_{\text{tot}}^{\text{②}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 \\ P_{\text{tot}x}^{\text{②}} = m v \cos \beta + M V \\ P_{\text{tot}y}^{\text{②}} = m v \sin \beta \end{cases}$$

Imponendo che:

②

$$\begin{cases} E_{\text{TOT}}^{\text{①}} = E_{\text{TOT}}^{\text{②}} \\ P_{\text{TOT}_x}^{\text{①}} = P_{\text{TOT}_x}^{\text{②}} \\ P_{\text{TOT}_y}^{\text{①}} = - P_{\text{TOT}_y}^{\text{②}} \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 \\ m v_0 \cos \alpha = m v \cos \beta + M V \\ - m v_0 \sin \alpha = - m v \sin \beta \end{cases}$$

si tratta di 3 equazioni, le 3 incognite sono v, V, β

$$\begin{aligned} \text{①} & \quad v_0^2 = v^2 + \frac{M}{m} V^2 \\ \text{②} & \quad v_0 \cos \alpha = v \cos \beta + \frac{M}{m} V \\ \text{③} & \quad v_0 \sin \alpha = v \sin \beta \end{aligned}$$

Faccio il quadrato della seconda e della terza equazione:

$$\begin{cases} v_0^2 \cos^2 \alpha = v^2 \cos^2 \beta + \frac{M^2 V^2}{m^2} + 2 v \cos \beta \frac{M V}{m} \\ v_0^2 \sin^2 \alpha = v^2 \sin^2 \beta \end{cases}$$

Ora se sommo tra loro membro a membro

$$v_0^2 (\underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_{=1}) = v^2 (\underbrace{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta}_{=1}) + \frac{M^2 V^2}{m^2} + 2 v \cos \beta \cdot \frac{M V}{m}$$

Semplificando:

(3)

$$v_0^2 = v^2 + \frac{M^2 V^2}{m^2} + \frac{2M}{m} v V \cos \beta$$

Utilizzando adesso la prima equazione (I)

$$\Rightarrow \cancel{v^2} + \frac{M}{m} V^2 = \cancel{v^2} + \frac{M^2 V^2}{m^2} + \frac{2M}{m} v V \cos \beta$$

divido per V (che $\neq 0$)

$$\frac{M}{m} V = \frac{M^2 V}{m^2} + \frac{2M}{m} v \cos \beta \quad \text{eq. 1}$$

Ora, dall'equazione (II) si ha che:

$$v \cos \beta = v_0 \cos \alpha - \frac{M}{m} V$$

che vado a sostituire nell'eq. 1

$$\frac{M}{m} V = \frac{M^2 V}{m^2} + \frac{2M}{m} \left(v_0 \cos \alpha - \frac{M}{m} V \right)$$

$$\frac{M}{m} V = \frac{M^2 V}{m^2} - \frac{2M^2 V}{m^2} + \frac{2M}{m} v_0 \cos \alpha$$

$$V \left(\frac{M}{m} + \frac{M^2}{m^2} \right) = \frac{2M}{m} v_0 \cos \alpha$$

$$V \left(1 + \frac{M}{m} \right) = 2 v_0 \cos \alpha$$

$$V = \frac{2 v_0 \cos \alpha}{1 + \frac{M}{m}}$$

Il valore appena trovato di V lo inserisco nell'equazione (I) per trovare v

$$v_0^2 = v^2 + \frac{M}{m} \cdot \frac{4 v_0^2 \cos^2 \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m} \right)^2}$$

$$v^2 = v_0^2 - 4v_0^2 \frac{M}{m} \frac{\cos \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m}\right)^2} \quad (4)$$

$$v^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{4 \cos \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m}\right)^2} \frac{M}{m} \right)$$

$$\Rightarrow v = v_0 \sqrt{1 - \frac{4 \frac{M}{m} \cos \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m}\right)^2}}$$

Ora utilizzo l'equazione (III) per trovare β

$$\sin \beta = \frac{v_0}{v} \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \sin \alpha \left(1 - \frac{4 \frac{M}{m} \cos \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Valori numerici:

$$v = 1,428 \text{ m/s} \approx 1,4 \text{ m/s} \quad (2 \text{ cifre significative})$$

$$v = 8,68 \text{ m/s} \approx 8,7 \text{ m/s} \quad " \quad "$$

$$\sin \beta = 0,9977 \Rightarrow \beta = 86,1^\circ \approx 86^\circ$$

NOTA: Nel caso che $M \gg m$ si ha che

$$v = \frac{2v_0 \cos \alpha}{1 + \frac{M}{m}} \rightarrow 0 \quad v \approx 0$$

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{4 \cos \alpha}{\frac{m}{M} \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^2 \left[1 + \frac{m}{M}\right]^2}} \approx$$

0

$$v \approx v_0 \sqrt{1 - \frac{4 \cos \alpha}{\frac{M}{m}}} \approx v_0 \quad \text{⑤}$$

$$\sin \beta \approx \sin \alpha \Rightarrow \beta = \alpha$$

Questo è proprio quello che si verifica quando una pallina urta in modo elastico il pavimento (che rimane fermo).

3) Le vagoni, in assenza di attrito (e non considerando più la pallina ed eventuali altri urti con le vagoni) si continuerebbe a muovere a velocità costante pari a $V_0 = 1,4 \text{ m/s}$ collocata nel punto precedente.

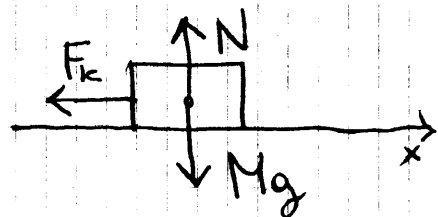


diagramma di corpo libero

F_k = forza di attrito dinamico

$$\begin{cases} N - Mg = 0 \\ -F_k = Ma_x \end{cases}$$

a_x = componente x dell'accelerazione

$$F_k = \mu_k N = \mu_k Mg$$

$$\Rightarrow -\mu_k Mg = Ma_x \Rightarrow a_x = -\mu_k g$$

Moto uniformemente accelerato

$$x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 = x_0 + V_0 t - \frac{1}{2} \mu_k g t^2$$

$$V(t) = V_0 + a_x t = V_0 - \mu_k g t$$

Le vagoni si fermano nell'istante t_0 in cui $V(t_0) = 0$

$$V_0 - \mu_k g t_0 = 0$$

$$t_0 = \frac{V_0}{\mu_k g}$$

$$\Rightarrow x(t_0) - x_0 = V_0 t_0 - \frac{1}{2} \mu_k g t_0^2$$

Spostamento
prima di
fermarsi = Δx

$$\Delta x = \frac{V_0^2}{\mu_k g} - \frac{1}{2} \cancel{\mu_k g} \frac{V_0^2}{\mu_k^2 g^2}$$

$$\Delta x = \frac{V_0^2}{2 \mu_k g}$$

valore numerico

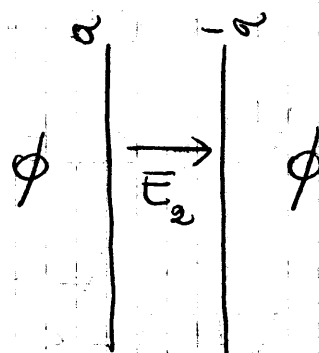
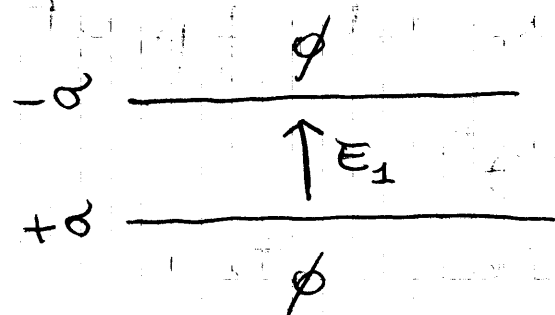
$$\Delta x = \frac{(1,428)^2}{2 \cdot 0,3 \cdot 9,81}$$

$$m = 0,346 \text{ m} \simeq 0,35 \text{ m}$$

(2 cifre significative)

ESERCIZIO 2

1) Utilizzando il principio di sovrapposizione, il campo elettrico Totale $\vec{E}$ è dato dalla somma vettoriale dei campi elettrici prodotti da ciascun conduttore $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$



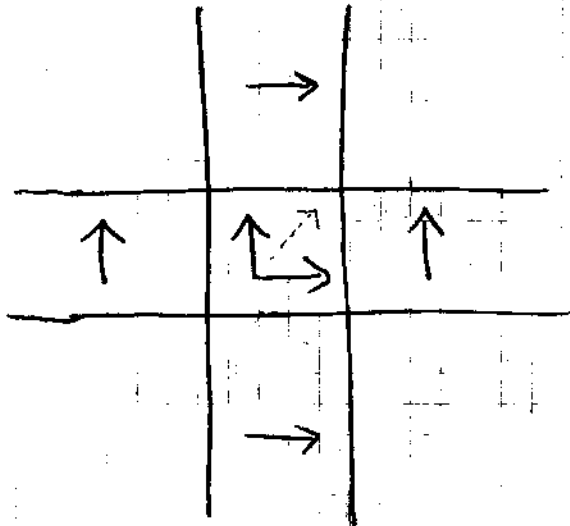
I campi $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ hanno lo stesso modulo $= \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ma direzioni diverse

(7)

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x}$$

Quindi:



Al centro i due campi si sommano. Il campo risultante è diretto lungo la diagonale del quadrato ed ha modulo

$$E = \sqrt{2} \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Valori numerici:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1,5 \cdot 10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \frac{V}{m} =$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = 169 \frac{V}{m}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = 1,7 \times 10^2 \frac{V}{m}$$

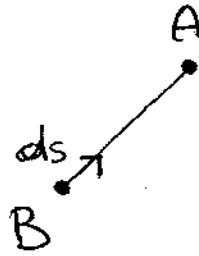
(2 cifre significative)

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \phi \\ \vec{E}_2 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} \\ \vec{E}_3 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} \\ \vec{E}_4 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} \\ \vec{E}_5 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} \\ \vec{E}_6 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} \\ \vec{E}_7 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} \\ \vec{E}_8 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} \\ \vec{E}_9 &= \phi \end{aligned}$$

$$2) V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (\text{per definizione}) \quad (8)$$

$$V_B - V_A = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

osservando $\vec{E} \parallel d\vec{s}$



$$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds = \sqrt{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} ds$$

$$V_B - V_A = \int_B^A \sqrt{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} ds = \sqrt{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_B^A ds =$$

$$= \sqrt{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \sqrt{2} d$$

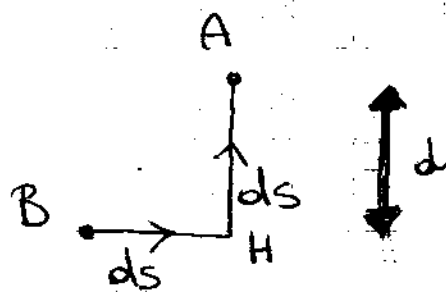
distanza
tra B e A
 $= \sqrt{2} d$

$$V_B - V_A = \frac{2\sigma d}{\epsilon_0}$$

Altro metodo:

$$V_B - V_A = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_B^H \vec{E} \cdot d\hat{x} + \int_H^A \vec{E} \cdot d\hat{y} =$$



$$= \int_B^H \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} \right) \cdot d\hat{x} + \int_H^A \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} \right) \cdot d\hat{y} =$$

$$= \int_B^H \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} \cdot d\hat{x} + \int_H^A \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} \cdot d\hat{y} \quad (9)$$

poiché $\begin{cases} \hat{x} \cdot d\hat{y} = 0 \\ \hat{y} \cdot d\hat{x} = 0 \end{cases}$ (sono ortogonali)

inoltre $\begin{cases} \hat{x} \cdot d\hat{x} = dx \\ \hat{y} \cdot d\hat{y} = dy \end{cases}$ (sono paralleli)

$$= \int_B^H \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx + \int_H^A \frac{\sigma}{\epsilon_0} dy = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d + \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{2\sigma d}{\epsilon_0}$$

Valore numerico:

$$V_B - V_A = 6,78 \text{ V} \simeq 6,8 \text{ V} \quad (2 \text{ cifre signif.})$$

3) Conservazione dell'energia meccanica + elettrostatica

$$E_A = E_B$$

$$E_A = -qV_A \rightarrow \text{energia potenziale elettrostatica della carica } -q \text{ nel punto A}$$

$$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 - qV_B$$

$$-qV_A = \frac{1}{2} m v_B^2 - qV_B$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = q(V_B - V_A)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2q}{m} (V_B - V_A)} = \sqrt{\frac{2q}{m} \cdot \frac{2\sigma d}{\epsilon_0}} = 2 \sqrt{\frac{\sigma q d}{\epsilon_0 m}}$$

Valore numerico:

$$v_B = 0,150 \text{ m/s} \simeq 1,5 \times 10^{-1} \text{ m/s} \quad (2 \text{ cifre signif.})$$