

Esercizio 1

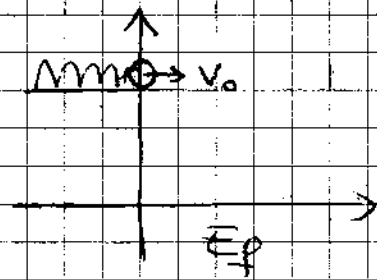
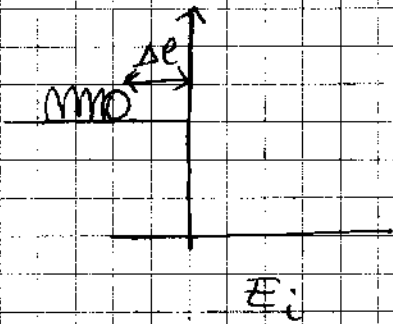
1) Un istante dopo lo sparo la velocità $\vec{v}_0$ dello sferetto è orientata secondo la direzione del cannone, ovvero orizzontale

$$\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$$

Poiché non intervengono forze non conservative (come ad esempio attriti) durante lo sparo si conserva l'energia meccanica del sistema molla + sferetto.

$$E_i = E_f$$

con $E_i = \frac{1}{2} k (\Delta e)^2$ e $E_f = \frac{1}{2} m v_0^2$



Avevamo posto lo zero dell'energia potenziale gravitazionale al livello del cannone, e poiché nell'istante finale la molla ha la sua lunghezza di riposo.

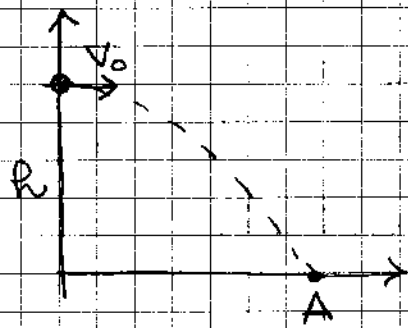
$$\Rightarrow \frac{1}{2} k (\Delta e)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Delta e$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{55}{0,12}} \cdot 0,15 \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} v_0 = 3,2 \frac{m}{s} & (\text{due cifre significative}) \\ \vec{v}_0 = v_0 \hat{x} \end{cases}$$

2) Dopo lo sparo lo sferetta si muove sotto l'azione della forza peso. ②



Compie una traiettoria parabolica e urta il suolo nel punto A.

$v_x = v_0$ durante tutto il moto
poiché $P_x = \text{costante}$
quantità di moto nella direzione x

infatti $\frac{dP_x}{dt} = \textcircled{F_x}$ è uguale a zero
(non ci sono forze esterne nella direzione x)

Teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta K = L_g \quad \text{con } L_g = \text{lavoro della forza peso}$$

$$\Delta K = K_{\text{fin}} - K_{\text{in}} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Osservo che $v_1^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 + v_{1y}^2$

$$\Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} m v_{1y}^2$$

$$L_g = mgh$$

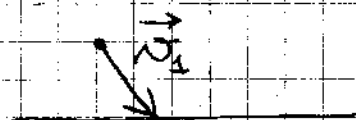
Quindi $\frac{1}{2} m v_{1y}^2 = mgh$

$$\Rightarrow |v_{1y}| = \sqrt{2gh}$$

$$|v_{1y}| = \sqrt{2 \times 9,8 \times 1,3} \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} v_{1y} = -5,0 \text{ m/s} \\ v_{1x} = 3,2 \text{ m/s} \end{cases}$$

prima dell'urto.



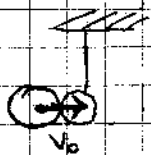
L'urto con il suolo è elastico. Il suolo ha massa infinita, quindi dopo l'urto la componente y della velocità della sferetta cambia segno mentre quella x resta inalterata.

$$\begin{cases} v_{2x} = v_{1x} & = 3,2 \text{ m/s} \\ v_{2y} = -v_{1y} & = 5,0 \text{ m/s} \end{cases}$$



3) Quando, dopo il rimbalzo, la sferetta è nel punto più alto della sua traiettoria, la sua velocità è
 $\vec{v} = v_0 \hat{x}$

In fatti nel punto più alto la velocità della sferetta nella direzione verticale $\vec{v} = 0$, mentre la velocità nella direzione orizzontale si mantiene sempre $= v_0$.



Urto completamente elastico.

Si conserva la quantità di moto del sistema $m + m_1$. Infatti anche se è presente la forza vincolare del filo, questa è diretta in una direzione perpendicolare a quella dell'urto.

$$mv_0 = (m + m_1)V$$

} componenti x

$$\Rightarrow V = \frac{m}{m + m_1} v_0$$

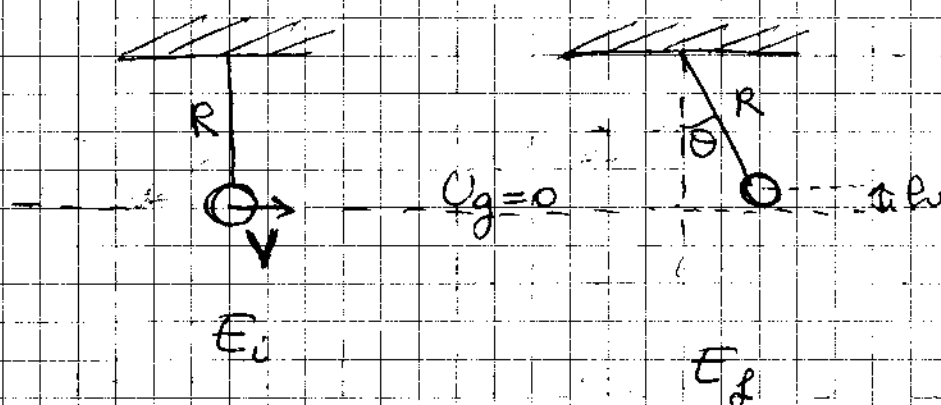
$$V = \frac{0,12}{0,12 + 0,05} \cdot 3,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V = 2,3 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = 2,3 \text{ m/s } \hat{x}$$

④

4) Dopo l'urto in conserva l'energia meccanica del sistema $m+m_1$



Quando il filo forma l'angolo max con la verticale la massa m_1+m ha velocità = 0 (punto di inversione del moto)

$$E_i = \frac{1}{2} (m+m_1) V^2$$

$$E_f = (m+m_1) g h$$

$$\text{con } h = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (m+m_1) V^2 = (m+m_1) g R (1 - \cos \theta)$$

$$1 - \cos \theta = \frac{V^2}{2gR}$$

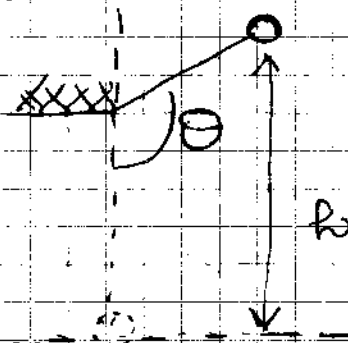
$$\cos \theta = 1 - \frac{V^2}{2gR}$$

$$\cos \theta = -0,50$$

$$\Rightarrow \theta = 120^\circ \quad \text{ovvero}$$

$$h = R(1 - \cos \theta) = R(1 + 0,5)$$

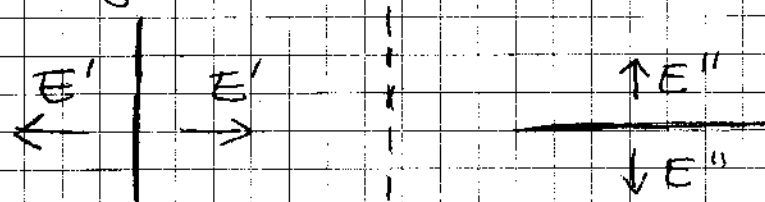
$$h = 0,27 \text{ m}$$



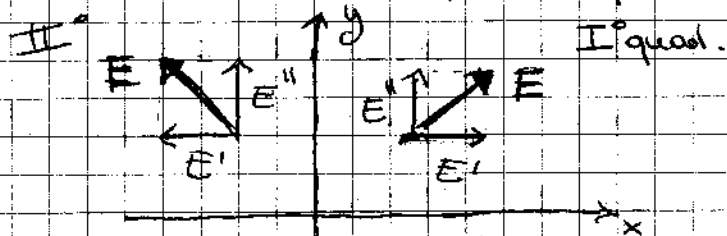
Esercizio 2

5

1) Per un suolo piano dielettrico $E' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = E''$



Utilizzando il principio di sovrapposizione



$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$$

Il modulo di $\vec{E}$ è lo stesso nei quattro quadranti e vale

$$E = \sqrt{2} \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E = \sqrt{2} \cdot \frac{1,3 \times 10^{-6}}{2 \cdot 8,85 \times 10^{-12}} \frac{V}{m}$$

$$E = 0,10 \times 10^6 \frac{V}{m} = 1,0 \times 10^5 \frac{V}{m}$$

La direzione di $\vec{E}$ è diversa in ciascuno dei 4 quadranti. Nel I° e nel III° è secondo la retta $y=x$, nel II° e nel IV° quadrante è secondo la retta $y=-x$. Più precisamente:

I° quad ($x > 0$
 $y > 0$)

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

II° quad ($x < 0$
 $y > 0$)

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

III° quad ($x < 0$
 $y < 0$)

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

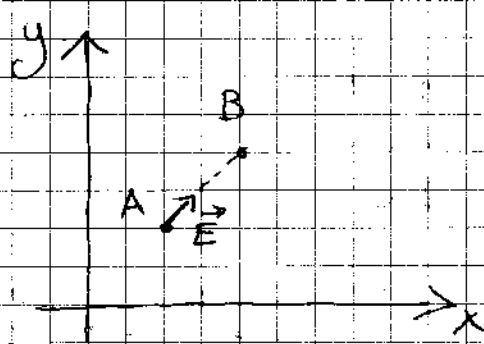
$$E_y = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

IV° quad ($x > 0$
 $y < 0$)

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_y = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

2) I due punti A e B appartengono alla retta $y=x$ (6)

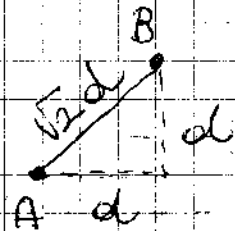


$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Osservo che $\vec{E} \parallel d\vec{s}$
 se il percorso da A a B
 viene svolto lungo la
 retta $y=x$

$$V_A - V_B = \int_A^B E ds = E \int_A^B ds \quad \text{poiché } E \text{ è costante}$$

$$= E \cdot \sqrt{2} d$$



$$V_A - V_B = 1,0 \times 10^5 \times \sqrt{2} \times 0,015 \text{ V}$$

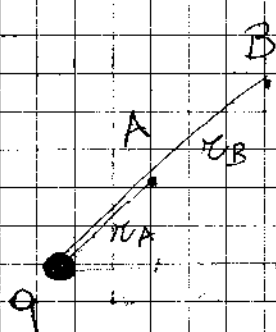
$$V_A - V_B = 2,1 \times 10^3 \text{ V}$$

3) Utilizzando il principio di sovrapposizione

$$V_A - V_B = (V_A - V_B)_{\text{solo i due punti}} + (V_A - V_B)_{\text{solo la carica q}}$$

questo termine è
 quello calcolato
 nel punto precedente

Calcolo di $(V_A - V_B)_{\text{solo la carica q}}$



$$r_A = \sqrt{2} d$$

$$r_B = \sqrt{2} \cdot 2d$$

(7)

Il campo elettrico generato dalla carica q è radiale

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} E dr$$

con $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$(V_A - V_B)_{\text{solo carica } q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2d} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 2\sqrt{2} d}$$

$$\Rightarrow (V_A - V_B)_{\text{solo carica } q} = \frac{2,0 \times 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 0,015} \text{ V}$$

$$= 0,42 \times 10^3 \text{ V} = 4,2 \times 10^2 \text{ V}$$

Combinando i due risultati

$$V_A' - V_B' = 2,1 \times 10^3 \text{ V} + 4,2 \times 10^2 \text{ V} =$$

$$= 2,5 \times 10^3 \text{ V} \quad (\text{due cifre significative})$$

4) Conservazione dell'energia (meccanica + elettrostatica)

$$E_i = U_A$$

$$m = 2,7 \text{ mg} = 2,7 \times 10^{-6} \text{ kg} \quad (8)$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v^2 + U_B$$

$$\text{con } U_A = Q V_A \quad \text{e} \quad U_B = Q V_B$$

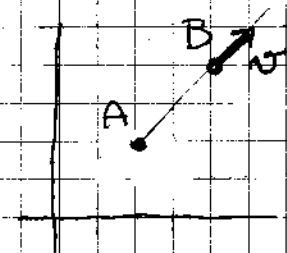
$$\Rightarrow U_A = \frac{1}{2} m v^2 + U_B$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = U_A - U_B$$

$$v = \frac{2}{m} \sqrt{Q(V_A - V_B)}$$

$$v = \frac{2}{2,7 \times 10^{-6}} \sqrt{2,5 \times 10^{-6} \cdot 2,5 \times 10^3} \quad \text{m/s}$$

$$v = 0,059 \times 10^6 \text{ m/s} = 5,9 \times 10^4 \text{ m/s}$$



$\vec{v}$ è diretta secondo la retta $y=x$

In fatti la massa m si muove solo soggetta alla forza elettrica $\vec{F} = Q\vec{E}$ quindi il moto si svolge nella direzione di $\vec{F}$ (in parte da ferma)