ESAME DI FISICA 17/4/2009 ①

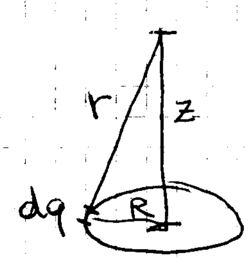
ESERCIZIO 1

1) Densità λ data da:

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} = \frac{\text{carica totale}}{\text{lunghezza della circonferenza}}$$

Potenziale nel punto generico dell'asse z

$$V(z) = \int K_e \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$



con $dq = \lambda \underbrace{ds}_{\text{elemento di circonferenza}} = \lambda \underbrace{R\,d\theta}_{=ds}$

e con $r = \sqrt{z^2+R^2}$

$$\rightarrow V(z) = k_e \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R\, d\theta}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

l'integrale è fatto su tutta la circonferenza, θ tra 0 e 2π.

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda R\, \cancel{2\pi}}{\underset{2}{\cancel{4\pi}}\,\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$\boxed{V(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}}$$

2) Il campo elettrico nei punti dell'asse z è diretto lungo l'asse $\hat{z}$ per ragioni di simmetria

$$E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$E(z) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}\right) =$$

$$= -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) =$$

$$= -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\frac{1}{(z^2+R^2)^{3/2}}\cdot\cancel{2}z =$$

$$\boxed{E(z) = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}} \quad \text{con} \quad \boxed{\vec{E}(z) = E(z)\cdot\hat{z}}$$

3) Forza elettrostatica sulla carica $-q$

$$\vec{F}_{TOT} = -q\cdot\vec{E}(d) \quad -mg\hat{z}$$

forza peso

$$\vec{F}_{TOT} = \left(-q\cdot\frac{\lambda R d}{2\varepsilon_0(d^2+R^2)^{3/2}} - mg\right)\hat{z}$$

Dalla II^a legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-\frac{q}{m}\,\frac{\lambda R d}{2\varepsilon_0(d^2+R^2)^{3/2}} - g\right)\hat{z}}$$

4) Conservazione dell'energia (meccanica + elettrostatica)

$$E_i = E_f$$

quando m è ferma a distanza d (a $t=0$)

$\rightarrow$ quando m passa per $z=0$

$$E_i = mgd + \underbrace{(-q)V(d)}_{\text{energia pot. elettrost. in } z=d}$$

ponendo $U_g=0$ alla quota $z=0$

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + (-q)\cdot V(0)$$

$$mgd - qV(d) = \frac{1}{2}mv^2 - qV(0)$$

$$mgd - q\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{d^2+R^2}} = \frac{1}{2}mv^2 - q\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 R}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgd + \frac{q\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{d^2+R^2}}\right]$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gd + \frac{q\lambda R}{m\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)}}$$

ESERCIZIO 2

vedi soluzione del II° compitino del 17/4/09