

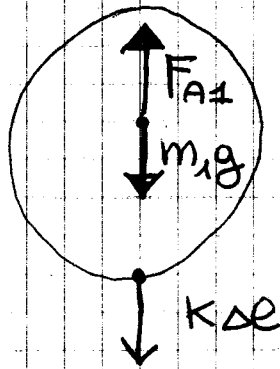
ESERCIZIO 1

(1)

- 1) Poiché il sistema è in equilibrio, $\sum \vec{F}$ agenti su ciascuna massa deve essere $= 0$ e anche $\sum \tau = 0$ (somma dei momenti delle forze)

Diagramma di corpo libero:

Sfera:



F_{A1} = forza di Archimede su m_1

$$F_{A1} = \underbrace{\frac{2}{3} \pi R_1^3 \rho_0}_{1/2 \cdot \text{Volume della sfera}} g$$

Nota che $\rho_1 = \frac{m_1}{\frac{4}{3} \pi R_1^3}$

$$\Rightarrow F_{A1} = \frac{\rho_0}{2 \rho_1} m_1 g$$

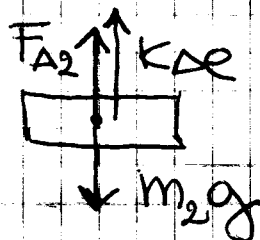
($K \Delta l$ = modulo della forza elastica)

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\rho_0}{2 \rho_1} m_1 g - m_1 g - K \Delta l = 0$$

Nota che rispetto al centro di massa della sfera queste tre forze hanno momento nullo, quindi automaticamente $\sum \tau = 0$ è verificata.

$$\Rightarrow \left(\frac{\rho_0}{2 \rho_1} - 1 \right) m_1 g - K \Delta l = 0 \quad (\text{eq. 1})$$

Blocchetto



$$\text{con } F_{A2} = \frac{\rho_0}{\rho_2} m_2 g$$

forza di Archimede (il blocchetto è completamente immerso)

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho_2} m_2 g + k \Delta l - m_2 g = 0 \quad (2)$$

ovvero $\left(\frac{\rho_0}{\rho_2} - 1\right) m_2 g + k \Delta l = 0 \quad (\text{eq. 2})$

Equazioni 1 e 2 costituiscono un sistema in cui le incognite da determinare sono m_2 e Δl .

$$\begin{cases} \left(\frac{\rho_0}{2\rho_1} - 1\right) m_1 g - k \Delta l = 0 \\ \left(\frac{\rho_0}{\rho_2} - 1\right) m_2 g + k \Delta l = 0 \end{cases}$$

Sommando tra loro le due equazioni si trova:

$$\left(\frac{\rho_0}{2\rho_1} - 1\right) m_1 g + \left(\frac{\rho_0}{\rho_2} - 1\right) m_2 g = 0$$

da cui

$$m_2 = \frac{1 - \frac{\rho_0}{2\rho_1}}{\frac{\rho_0}{\rho_2} - 1} m_1 = \frac{\frac{\rho_0}{2\rho_1} - 1}{1 - \frac{\rho_0}{\rho_2}} m_1$$

Valore numerico:

$$\rho_1 = \frac{0,5}{\frac{4}{3}\pi(0,12)^3} \text{ kg/m}^3 \rightarrow \rho_1 = 69,08 \text{ kg/m}^3$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{1 - \frac{1000}{69,08 \cdot 2}}{\frac{1000}{1500} - 1} \cdot 0,5 \text{ kg} = \frac{-6,238}{-0,333} \cdot 0,5 \text{ kg}$$

$$m_2 = 9,36 \text{ kg}$$

$$m_2 = 9,4 \text{ kg}$$

2 cifre
significative

(3)

2) Quindi dalle eq. 2

$$k \Delta e = - \left(\frac{\rho_0}{\rho_2} - 1 \right) m_2 g$$

$$\Delta e = \frac{g}{k} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2} \right) \cdot m_2$$

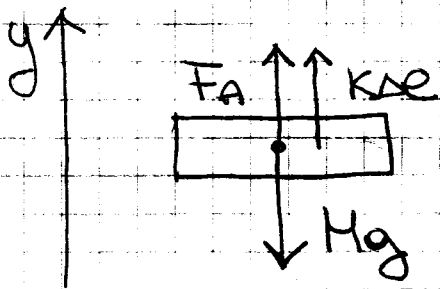
$$\Delta e = \frac{g}{k} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2} \right) \frac{\left(\frac{\rho_0}{2\rho_1} - 1 \right)}{\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2} \right)} m_1$$

$$\Delta e = \left(\frac{\rho_0}{2\rho_1} - 1 \right) \frac{m_1 g}{k}$$

Valore numerico:

$$\Delta e = \left(\frac{1000}{2 \cdot 69,08} - 1 \right) \frac{0,5 \cdot 9,81}{90} \text{ m} = 0,340 \text{ m}$$

$$\Delta e = 34 \text{ cm} \quad 2 \text{ cifre significative}$$

3) II^a legge di Newton $\sum \vec{F} = M \vec{a}$ applicata al blocco di massa M 

$$F_A = \frac{\rho_0}{\rho_2} Mg$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_2} Mg + k \Delta e - Mg = M a_y$$

$$\text{con } \vec{a} = a_y \hat{y}$$

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_2} - 1 \right) Mg + k \Delta e = M a_y$$

$$\Rightarrow a_y = \left(\frac{p_0}{p_2} - 1 \right) g + \frac{K}{M} \Delta e$$

sostituendo Δe il valore trovato al punto 1.2 4

$$a_y = \left(\frac{p_0}{p_2} - 1 \right) g + \frac{K}{2m_2} \cdot \left(\frac{p_0}{2p_1} - 1 \right) \frac{m_1 g}{K}$$

sostituendo m_2

$$a_y = \left(\frac{p_0}{p_2} - 1 \right) g + \left(\frac{p_0}{2p_1} - 1 \right) \frac{m_1 g}{2} \cdot \frac{1 - \frac{p_0}{p_2}}{\left(\frac{p_0}{2p_1} - 1 \right) \frac{1}{m_1}}$$

$$a_y = \left(\frac{p_0}{p_2} - 1 \right) g + \left(1 - \frac{p_0}{p_2} \right) \frac{g}{2}$$

$$a_y = \left(\frac{p_0}{p_2} - 1 \right) \frac{g}{2}$$

Valore numerico:

$$a_y = \left(\frac{1000}{1500} - 1 \right) \frac{9,81}{2} \text{ m/s}^2$$

$$a_y = -1,635 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = -1,6 \text{ m/s}^2$$

2 cifre
signif.

$$\vec{a} = a_y \hat{y}$$

quindi il bloccetto M
accelera verso il basso a $t=0$

4) Applico il teorema delle forze vive
(dell'Energia cinetica) al blocco M, considerando
come istante iniziale $t=0$ e come
istante finale l'istante in cui è sceso della
lunghezza h

$$\Delta K = \sum L_i$$

(5)

$$\Delta K = K_{fin} - K_{in} = \frac{1}{2} M v^2 - \phi = \frac{1}{2} M v^2$$

$$\sum L_i = L_p + L_{F_A} + L_K$$

L_p = Lavoro compiuto dalla forza peso

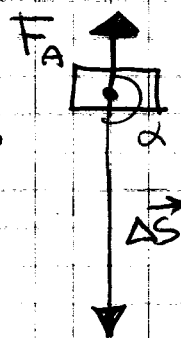
L_{F_A} = " " " " di Archimede

L_K = " " " " elastica

(L_{F_A}): Poiché $\vec{F}_A$ è una forza costante

$$L_{F_A} = \vec{F}_A \cdot \Delta \vec{S}$$

prodotto scalare



$$L_{F_A} = F_A \Delta S \cos \alpha$$

con $\alpha = 180^\circ$
e $\Delta S = h$

$$L_{F_A} = -F_A h$$

$$L_{F_A} = -\frac{\rho_0}{\rho_2} M g h$$

(L_p): Poiché la forza peso è conservativa

$$L_p = -\Delta U_g \quad \text{con } \Delta U_g = \text{variazione di energia potenziale gravitazionale}$$

$$\Delta U_g = U_{g_{fin}} - U_{g_{iniz}}$$

Ponendo $U_{g_{fin}} = 0$ nella posizione di arrivo

$$\Rightarrow U_{g_{iniz}} = M g h$$

e quindi $\Delta U_g = 0 - M g h = -M g h$

e $L_p = -\Delta U_g = M g h$

(L_K): Poiché la forza elastica è conservativa

$$L_K = -\Delta U_K$$

con $\Delta U_K = \text{variazione di energia potenziale elastica}$

$$\Delta U_k = U_{k \text{ fin}} - U_{k \text{ iniz.}}$$

$$U_{k \text{ iniz}} = \frac{1}{2} k (\Delta e)^2$$

Nell'istante finale la molla è lunga $L_0 + \Delta e + h$ quindi l'allungamento è $(\Delta e + h)$

$$\rightarrow U_{k \text{ fin}} = \frac{1}{2} k (\Delta e + h)^2$$

Quindi

$$\Delta U_k = \frac{1}{2} k (\Delta e + h)^2 - \frac{1}{2} k (\Delta e)^2$$

$$L_k = -\Delta U_k = \frac{1}{2} k [(\Delta e)^2 - (\Delta e + h)^2]$$

Quindi, sommando tutti i contributi

$$\frac{1}{2} M v^2 = M g h - \frac{\rho_0}{\rho_2} M g h + \frac{1}{2} k [(\Delta e)^2 - (\Delta e + h)^2]$$

$$v^2 = 2 g h \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2}\right) + \frac{k}{M} [(\Delta e)^2 - (\Delta e + h)^2]$$

$$v = \sqrt{2 g h \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2}\right) - \frac{k}{2 m_2} (h^2 + 2 h \Delta e)}$$

$$v = \sqrt{2 g h \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2}\right) - \frac{k h}{2 m_2} (h + 2 \Delta e)}$$

Valore numerico:

$$v = \sqrt{1,962 - 1,413}$$

$$v = 0,741 \text{ m/s}$$

$$\text{m/s} = \sqrt{0,549} \text{ m/s}$$

$$v = 0,74 \text{ m/s}$$

2 cifre
signif.

ESERCIZIO 2

(7)

1) Poiché le due sfere sono collegate da un filo conduttore, esse sono equipotenziali

$$V_1 = V_2$$

Posso considerare le due sfere come isolate, quindi

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

Inoltre deve essere $q_1 + q_2 = q$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ q_1 + q_2 = q \end{cases}$$

sistema di
2 equazioni
con incognite
 q_1 e q_2

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \\ q_1 + q_2 = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{R_1}{R_2} q_2 \\ \frac{R_1}{R_2} q_2 + q_2 = q \end{cases}$$

$$q_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = q \Rightarrow q_2 \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2} \right) = q$$

$$\Rightarrow \boxed{q_2 = \frac{q R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$q_1 = q - q_2 = q \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = q \frac{\cancel{R_1 + R_2} - R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{q_1 = \frac{q R_1}{R_1 + R_2}}$$

Valori numerici:

8

$$q_1 = \frac{60 \times 10^{-9} \cdot 0,1}{0,1 + 0,02} \quad C = 50 \times 10^{-9} C = \boxed{50 \text{ nC}}$$

$$q_2 = \frac{60 \times 10^{-9} \cdot 0,02}{0,1 + 0,02} \quad C = 10 \times 10^{-9} C = \boxed{10 \text{ nC}}$$

2) Densità superficiali:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \rightarrow \text{superficie della sfera}$$
$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

Valori numerici:

$$\sigma_1 = \frac{50 \times 10^{-9}}{4\pi (0,1)^2} \frac{C}{m^2} = 39,8 \times 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_1 = 40 \times 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{10 \times 10^{-9}}{4\pi \times (0,02)^2} \frac{C}{m^2} = 199 \times 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_2 = 200 \times 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

Il modulo del campo elettrico in prossimità di un conduttore vale $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} ; E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$



Valori numerici:

$$E_1 = 4,49 \times 10^4 \frac{V}{m} \approx 45 \frac{kV}{m}$$

$$E_2 = 2,25 \times 10^4 \frac{V}{m} \approx 23 \frac{kV}{m}$$

2 cifre signif.

3) In questo caso, poiché i due conduttori sono collegati dal filo conduttore, devono sempre avere la stessa equipotenzialità. ⑨

$$V'_1 = V'_2$$

Inoltre il potenziale V'_1 della sfera S_1 si può scrivere come:

$$V'_1 = \underbrace{\frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}}_{\text{contributo dovuto alla carica } q'_1 \text{ sulla sfera } S_1} + \underbrace{\frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 d}}_{\text{contributo dovuto alla carica } q'_2 \text{ che si trova a distanza } d}$$

Analogamente:

$$V'_2 = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 d} \\ q'_1 + q'_2 = q \end{cases}$$

Sistema di 2 equazioni, e incognite sono q'_1 e q'_2

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{q'_1}{R_1} + \frac{q'_2}{d} = \frac{q'_2}{R_2} + \frac{q'_1}{d} \\ q'_1 + q'_2 = q \end{cases}$$

$$q_1' \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d} \right) = q_2' \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{d} \right)$$

10

$$q_1' \frac{d-R_1}{R_1 d} = q_2' \frac{d-R_2}{R_2 d}$$

$$q_1' = \frac{(d-R_2)}{R_2} \cdot \frac{R_1}{(d-R_1)} q_2'$$

$$\Rightarrow q_1' = \frac{R_1 (d-R_2)}{R_2 (d-R_1)} q_2'$$

and also we
substitute with
secondary equation

$$\frac{R_1 (d-R_2)}{R_2 (d-R_1)} q_2' + q_2' = q$$

$$q_2' \left(1 + \frac{R_1 (d-R_2)}{R_2 (d-R_1)} \right) = q$$

$$q_2' = \frac{q}{1 + \frac{R_1 (d-R_2)}{R_2 (d-R_1)}}$$

$$q_1' = q - \frac{q}{1 + \frac{R_1 (d-R_2)}{R_2 (d-R_1)}} = \frac{\frac{R_1 (d-R_2)}{R_2 (d-R_1)}}{1 + \frac{R_1 (d-R_2)}{R_2 (d-R_1)}} q$$

$$q_1' = \frac{q}{1 + \frac{R_2 (d-R_1)}{R_1 (d-R_2)}}$$

Valori numerici:

14

$$q'_1 = \frac{60 \times 10^{-9}}{1 + \frac{0,1}{0,02} \frac{(1-0,02)}{(1-0,1)}} C$$

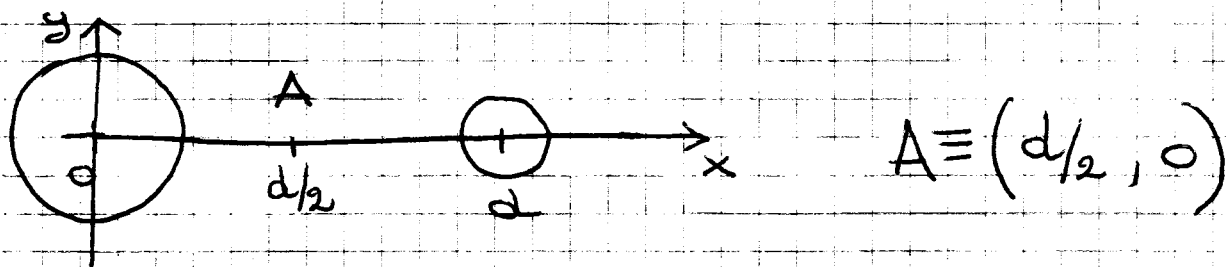
$$q'_1 = \frac{60 \times 10^{-9}}{6,444} C = 9,31 \times 10^{-9} C$$

$$q'_1 = 9,3 \text{ nC} \quad 2 \text{ cifre sig.}$$

$$q'_2 = (60 \times 10^{-9} - 9,31 \times 10^{-9}) C = 50,69 \text{ nC}$$

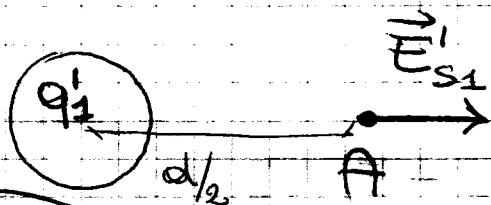
$$q'_2 = 51 \text{ nC}$$

4



$$\vec{E}' = \vec{E}'_{s1} + \vec{E}'_{s2}$$

per il principio di sovrapposizione



$$E'_{s1} = \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 (d/2)^2}$$

Poiché $q'_1 > 0$ (è positiva) il campo $\vec{E}'_{s1}$ è USCENTE dalla sfera S1

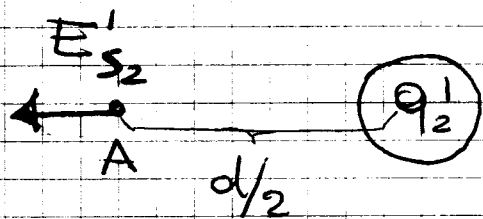
Il campo generato da una sfera conduttrice uniformemente carica al suo esterno è uguale al campo generato da una carica puntiforme posta al centro ^{della} sfera

Obtenendo gli assi cartesiani in figura

(12)

$$\vec{E}'_{S1} = E'_{S1} \hat{x}$$

(è nel verso positivo dell'asse x)



$$\text{con } E'_{S2} = \frac{q_2'}{4\pi\epsilon_0(d/2)^2}$$

modulo del campo elettrico

Poiché

q_2' è positiva allora $\vec{E}'_{S2}$ è USCENTE dalla sfera S2

Secondo gli assi cartesiani in fig. 2

$$\vec{E}'_{S2} = -E'_{S2} \hat{x} \quad \left(\begin{array}{l} \text{è nel} \\ \text{verso neg.} \\ \text{dell'asse x} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}' = \frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0(d/2)^2} \hat{x} - \frac{q_2'}{4\pi\epsilon_0(d/2)^2} \hat{x}$$

$$\vec{E}' = \frac{q_1' - q_2'}{4\pi\epsilon_0(d/2)^2} \hat{x}$$

$$\vec{E}' = E'_x \hat{x}$$

componente x

$$E'_x = \frac{q_1' - q_2'}{4\pi\epsilon_0(d/2)^2}$$

Valore numerico

$$E'_x = \frac{-41,38 \times 10^{-9}}{27,803 \times 10^{-12}} \frac{V}{m}$$

$$E'_x = -1,488 \times 10^3 \frac{V}{m}$$

$E'_x < 0$ quindi

$$E'_x = \frac{(9,31 - 50,69) \times 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12} \cdot (0,5)^2} \frac{V}{m}$$

$$\vec{E}' = -1,5 \frac{KV}{m}$$

$\vec{E}'$ è nel verso opposto all'asse x

