SOLUZIONI ESAME DI FISICA Geologia 1/2/2010

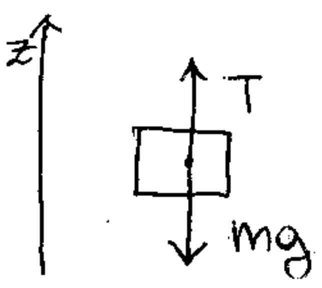
ESERCIZIO 1

1) Il sistema è in equilibrio:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

$$\sum \vec{\tau} = 0$$

Sul blocchetto m



$$T - mg = 0$$

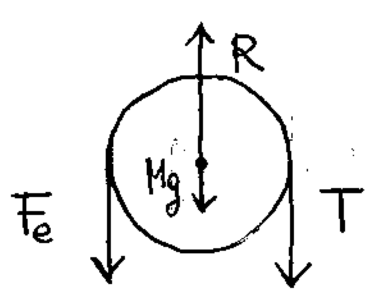
$$\boxed{T = mg}$$

$$T = 4 \cdot 9{,}81\ N = 39{,}2\ N$$

$$\boxed{T = 39\ N}$$

2 cifre significative

2) Sul disco



R = forza vincolare esercitata dal perno sul disco

F_e = modulo della forza elastica

$$F_e = k\Delta l$$

$$\sum \tau = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_e R - T R = 0$$

$$F_e = T$$

$$k\Delta l = mg$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{mg}{k}}$$

$$\Delta\ell = \frac{4 \cdot 9{,}81}{80}\ m = 0{,}49\ m$$

$$\boxed{\Delta\ell = 49\ cm}$$

3) Ⓘ = istante iniziale, in cui m si trova alla quota $h_0 + \Delta\ell$ con velocità nulla

Ⓕ = istante finale, in cui m passa per la quota h_0 con velocità v

$$K_{blocco} = \frac{1}{2} m v^2$$

Conservazione dell'energia meccanica

$$E_{i} = E_{f}$$ (ponendo $U_g = 0$ al livello del suolo)

$$E_{i} = mg(h_0 + \Delta\ell)$$

nota che nell'istante Ⓘ la molla è alla sua lunghezza di riposo

$$E_{f} = mgh_0 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

nota che nell'istante Ⓕ la molla è allungata di $\Delta\ell$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\omega^2 = \frac{v^2}{R^2}$$ poiché tra fune e disco non c'è scorrimento

$$\Rightarrow E_{f} = mgh_0 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2 + \frac{1}{4}Mv^2$$

$$E_{i} = E_{f}$$

$$\cancel{mgh_0} + mg\Delta\ell = \cancel{mgh_0} + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k(\Delta\ell)^2 + \frac{1}{4} M v^2 \quad 3$$

$$4 mg\,\Delta\ell = 2 m v^2 + 2k(\Delta\ell)^2 + M v^2$$

$$(2m + M) v^2 = 4 mg\Delta\ell - 2k(\Delta\ell)^2$$

poiché $\quad \Delta\ell = \dfrac{mg}{k}$

$$\Rightarrow (2m + M) v^2 = 4mg\frac{mg}{k} - 2\cancel{k}\frac{m^2 g^2}{k^{\cancel{2}}}$$

$$(2m + M) v^2 = 2\frac{m^2 g^2}{k}$$

$$v^2 = 2\frac{m^2 g^2}{k(2m + M)}$$

$$K_{blocco} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{\cancel{2}} m \cdot \frac{\cancel{2}\, m^2 g^2}{k(2m + M)}$$

$$\boxed{K_{blocco} = \frac{m^3 g^2}{k(2m + M)}}$$

$$K_{blocco} = \frac{(4)^3 \cdot (9{,}81)^2}{80\,(8 + 6)}\ \mathrm{J} = 5{,}50\ \mathrm{J}$$

$$\boxed{K_{blocco} = 5{,}5\ \mathrm{J}}$$ 2 cifre significative

4) $K_{disco} = \dfrac{1}{2} I\omega^2$

$$K_{disco} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\cdot\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4} M v^2$$

$$K_{disco} = \frac{1}{\cancel{4}_2} M \cdot \frac{\cancel{2} m^2 g^2}{k(2m+M)}$$

$$\boxed{K_{disco} = \frac{M m^2 g^2}{2k(2m+M)}}$$

$$K_{disco} = \frac{6 \cdot 4^2 \cdot (9{,}81)^2}{2 \cdot 80 \cdot (8+6)} \, J = 4{,}12 \, J$$

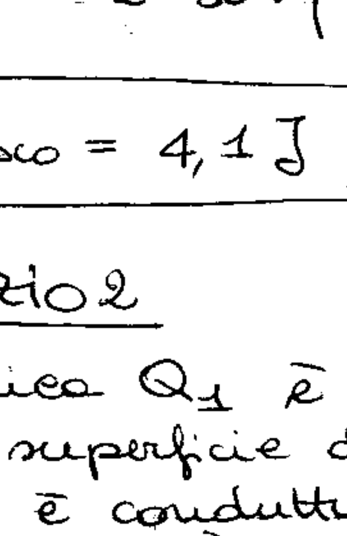
$$\boxed{K_{disco} = 4{,}1 \, J}$$

ESERCIZIO 2

La carica Q_1 è distribuita uniformemente sulla superficie della sfera di raggio a poiché è conduttrice (e siamo all'equilibrio elettrostatico).

Simmetria sferica

1)



Teorema di Gauss superficie sferica di raggio $r > c$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\Phi(\vec{E}) = 4\pi R^2 E$ a causa della sim. sferica

$E = 0$ per $r > c$ $\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = 0$

$\Rightarrow q_{int} = 0$

$q_{int} = Q_1 + Q_2$

Q_2 = carica totale contenuta nel dielettrico

$$Q_2 = \rho_2 \cdot V_2 \qquad V_2 = \text{volume del guscio dielettrico}$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi c^3 - \frac{4}{3}\pi b^3 = \frac{4}{3}\pi\left(c^3 - b^3\right)$$

$$\Rightarrow \quad Q_1 + \rho_2 \frac{4}{3}\pi\left(c^3 - b^3\right) = 0$$

$$\boxed{\rho_2 = -\frac{3Q_1}{4\pi\left(c^3 - b^3\right)}}$$

$$\rho_2 = -\frac{3 \cdot 33 \times 10^{-9}}{4\pi\left(0{,}12^3 - 0{,}10^3\right)} \frac{C}{m^3}$$

$$\rho_2 = -10822 \cdot 10^{-9} \frac{C}{m^3} = -10{,}8 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^3}$$

$$\boxed{\rho_2 = -11 \frac{\mu C}{m^3}}$$ 2 cifre significative

2) $0 \leq r < a$ $\quad \boxed{\vec{E}_I(r) = 0}$

perché all'interno del conduttore

$a < r < b$ $\qquad \Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{\vec{E}_{II}(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

$b < r < c$

siamo dentro il dielettrico

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

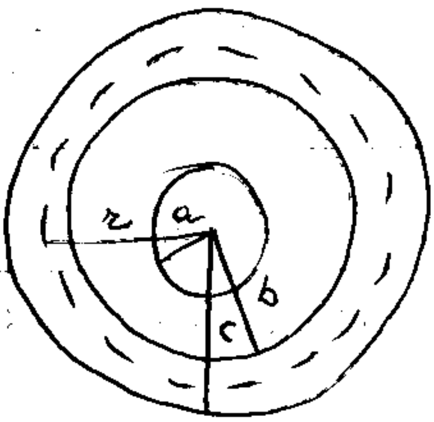
$$4\pi r^2 E_{III} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$q_{int} = Q_1 + \rho_2 V_{int}$$

V_{int} = volume del dielettrico interno alla sfera di raggio r

$$V_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi b^3$$

$$V_{int} = \frac{4}{3}\pi (r^3 - b^3)$$



$$q_{int} = Q_1 + \rho_2 \frac{4\pi}{3}(r^3 - b^3)$$

$$q_{int} = Q_1 - \frac{\cancel{3} Q_1}{\cancel{4\pi}(c^3 - b^3)} \cdot \frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{3}}(r^3 - b^3)$$

$$q_{int} = Q_1 \cdot \left[1 - \frac{(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)} \right]$$

$$q_{int} = Q_1 \frac{c^3 - r^3}{c^3 - b^3}$$

$$\Rightarrow \quad E_{III} = \frac{q_{int}}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

$$\boxed{\vec{E}_{III}(r) = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r (c^3 - b^3)} \frac{c^3 - r^3}{r^2} \hat{r}}$$

7

3) $$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = \int_A^B \underset{\mathrm{II}}{E}(r)\,dr =$$

$$= \int_a^b \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b =$$

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

4) Conservazione dell'energia totale (meccanica + elettromagnetica)

$$E_A = E_B$$

$$E_A = q V_A$$

$$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + q V_B$$

$$q V_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + q V_B$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = q(V_A - V_B)$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2q}{m}(V_A - V_B)}}$$

$$V_A - V_B = \frac{33\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}02} - \frac{1}{0{,}10}\right)\ \mathrm{V}$$

$$V_A - V_B = 11{,}9\cdot\frac{10^{-9}}{10^{-12}}\ \mathrm{V} = 11{,}9\ \mathrm{mV} \simeq \boxed{12\ \mathrm{mV}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 10^{-12}}{0{,}0015}\cdot 11{,}9\cdot 10^{-3}}\ \mathrm{m/s} = \boxed{9{,}9\cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$