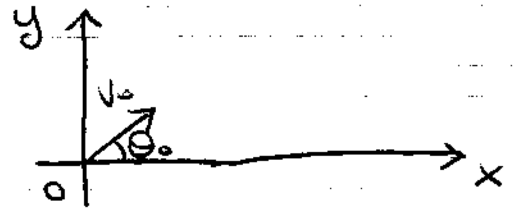
SOLUZIONI ESAME DI FISICA DEL 20/6/08

ESERCIZIO 1

1) Sia $t=0$ l'istante del lancio del missile M.



$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$
velocità iniziale di M

Moto uniformemente accelerato con accelerazione
$\vec{a} = -g\,\hat{y}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta_0 - gt \end{cases}$$

Nel punto di massima quota di M $v_y = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_x = v_0 \cos\theta_0 \\ V_y = 0 \end{cases} \qquad \vec{V} = V_x\,\hat{x} + V_y\,\hat{y}$$

$$V_x = 700 \cdot \cos(80^\circ)\ m/s = 121{,}6\ m/s = 122\ m/s$$

(3 cifre significative)

2) Nell'esplosione si conserva la quantità di moto del sistema dei due frammenti, poiché non ci sono forze esterne impulsive.

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$\vec{P}_i = M\vec{V} \qquad \vec{P}_f = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Per componenti:

$$\begin{cases} M V_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \\ M V_y = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} MV_x = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{M} V_x = \frac{1}{4} \cancel{M} v_1 \cos\theta_1 + \frac{3}{4} \cancel{M} v_2 \cos\theta_2 \\ 0 = \frac{1}{4} \cancel{M} v_1 \sin\theta_1 + \frac{3}{4} \cancel{M} v_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 \cos\theta_2 = \dfrac{4V_x - v_1 \cos\theta_1}{3} \\ v_2 \sin\theta_2 = \dfrac{-v_1 \sin\theta_1}{3} \end{cases}$$

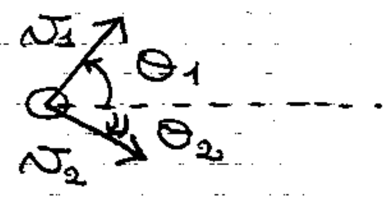
Dividendo la seconda equazione per la prima

$$\tan\theta_2 = \frac{-v_1 \sin\theta_1}{4V_x - v_1 \cos\theta_1}$$

numericamente:

$$\tan\theta_2 = \frac{-100 \cdot \sin(60°)}{4 \cdot 121{,}6 - 100 \cdot \cos(60°)} = -0{,}1984$$

$$\theta_2 = -11.2° \quad \text{(3 cifre significative)}$$



Quindi :

$$v_2 = \frac{-v_1 \sin\theta_1}{3 \sin\theta_2}$$

$$v_2 = \frac{-100 \cdot \sin(60°)}{3 \sin(-11{,}2°)} = 148{,}3 \text{ m/s} \simeq 148 \text{ m/s}$$

(3 cifre significative)

3) Bilancio energetico dell'esplosione:

$$\underbrace{E_{in}}_{\text{energia meccanica del missile}} + \underbrace{\Delta E_{ch}}_{\text{energia chimica}} = \underbrace{E_{fin}}_{\text{energia meccanica dei due frammenti}}$$

(Trascurando l'energia dissipata in calore, suono etc $\Delta E_{diss} = 0$) Se si volesse tenere in conto anche di questa energia il bilancio diventerebbe

$$E_{in} + \Delta E_{ch} = E_{fin} + \Delta E_{diss}$$

Quindi $\Delta E_{ch} = E_{fin} - E_{in}$

$$\Delta E_{ch} = \left(K_{fin} + U_{fin}\right) - \left(K_{in} + U_{in}\right)$$

Osservo che $U_{fin} = U_{in}$, ovvero l'energia potenziale non varia durante l'esplosione

$$\Delta E_{ch} = K_{fin} - K_{in}$$

$$\Delta E_{ch} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} M V^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} M v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} M v_2^2 - \frac{1}{2} M V_x^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M \left(\frac{1}{4} v_1^2 + \frac{3}{4} v_2^2 - V_x^2 \right)$$

numericamente:

$$\Delta E_{ch} = \frac{120}{2} \left(\frac{1}{4} \cdot (100)^2 + \frac{3}{4} (148,6)^2 - (121,6)^2 \right) J$$

$$\Delta E_{ch} = 252,5 \times 10^3 J \simeq 253 \, kJ$$

(3 cifre significative)

4) • $\vec{P}$ si conserva poiché non ci sono forze esterne al sistema di tipo impulsivo che agiscono durante l'esplosione.

Infatti le forze dell'esplosione sono interne, l'unica forza esterna è la forza peso, che è una forza costante e quindi non è impulsiva.

• $\vec{L}$ si conserva perché non ci sono forze esterne al sistema impulsive che producono un momento $\vec{\tau} \neq 0$. In questo caso non ci sono proprio forze esterne impulsive.

• E non si conserva durante le esplosioni. Se guardo il filmato di un'esplosione al contrario (invertendo il senso del tempo) sto osservando un urto completamente anelastico, quindi E non si conserva.

• U si conserva. L'energia potenziale dipende dalla posizione delle masse nel campo gravitazionale, prima dell'urto tutti corpi si trovano nelle medesime posizioni di un istante dopo l'urto.

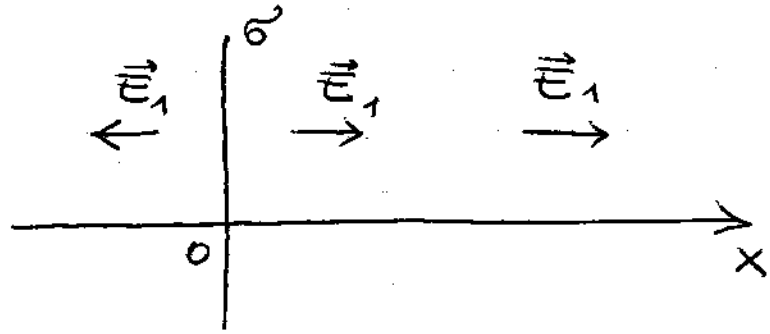
• K non si conserva, proprio come E.

ESERCIZIO 2

1) Utilizzando il principio di sovrapposizione, il campo elettrico generato dai due piani in tutto lo spazio è dato dalla somma vettoriale dei campi elettrici generati da ciascuno dei due piani considerati singolarmente:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

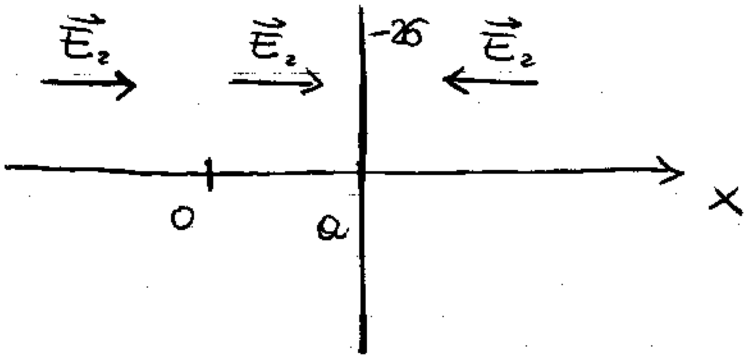
con $\vec{E}_1$ = campo generato dal piano in $x=0$



con $|\vec{E}_1| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} & x>0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} & x<0 \end{cases}$$

$\vec{E}_2$ = campo generato dal piano in $x=a$



con $|\vec{E}_2| = \dfrac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} & x>a \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} & x<a \end{cases}$$

Quindi $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E} = \begin{cases} \left(-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\hat{x} & \text{per } x<0 \\ \left(\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\hat{x} & \text{per } 0<x<a \\ \left(\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\hat{x} & \text{per } x>a \end{cases}$$

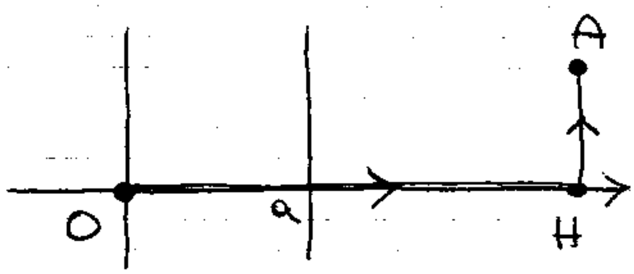
Ovvero

$$\vec{E} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{x} & \text{per} \quad x<0 \\ +\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{x} & \text{per} \quad 0<x<a \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{x} & \text{per} \quad x>a \end{cases}$$

$$\vec{E} \equiv (E_x, 0, 0)$$

2) $$\int_O^A \vec{E}\cdot d\vec{s} = V_O - V_A$$ differenza di potenziale tra i punti O ed A

NON dipende dal percorso poichè il campo $\vec{E}$ è conservativo.



percorso scelto:

$O \rightarrow H \rightarrow A$

con $H \equiv (3a, 0, 0)$

$$\int_O^A \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_O^H \vec{E}\cdot d\vec{s} + \underbrace{\int_H^A \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{=0} =$$

$=0$ poichè in questo tratto $\vec{E} \perp d\vec{s}$

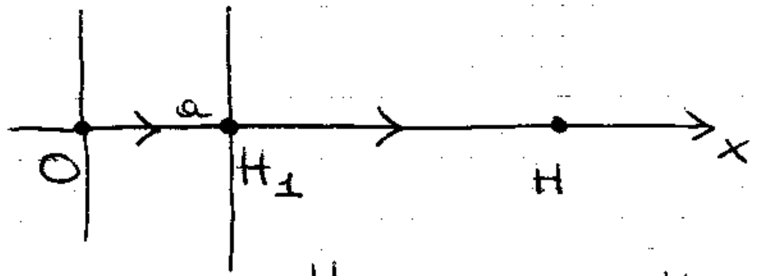
$$= \int_O^H \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Per raggiungere il punto H partendo dal punto O si devono attraversare due regioni dello spazio in cui il campo elettrico assume valori diversi

$0<x<a$ e $x>a$

Quindi spezzo ulteriormente e' integrale in questo modo:

con $H_1 \equiv (a,0,0)$



$$V_0 - V_A = \int_0^{H_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{H_1}^{H} \vec{E}\cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_0^a \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{x}\cdot d\vec{x} + \int_a^{3a} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{x}\cdot d\vec{x} =$$

$$= \int_0^a \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\,dx + \int_a^{3a} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dx =$$

$$= \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a dx - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_a^{3a} dx =$$

$$= \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\left[x\right]_0^a - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[x\right]_a^{3a} =$$

$$= \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\,a - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,2a = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(3a-2a) = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}$$

numericamente

$$V_0 - V_A = \frac{2\times 10^{-9}\times 0{,}02}{2\times 8{,}85\times 10^{-12}}\ V = 2{,}26\,V \simeq 2{,}3\,V$$

(2 cifre signif.)

3) Conservazione dell'energia meccanica + elettrostatica della carica q

$$E_i = qV_A$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + qV_{H_1}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV_{H_1} = qV_A$$

$$v = \sqrt{\frac{2q}{m}\left(V_A - V_{H_1}\right)}$$

con

$$V_A - V_{H_1} = -\int_{H_1}^{A} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{H_1}^{H} \vec{E}\cdot d\vec{s} =$$

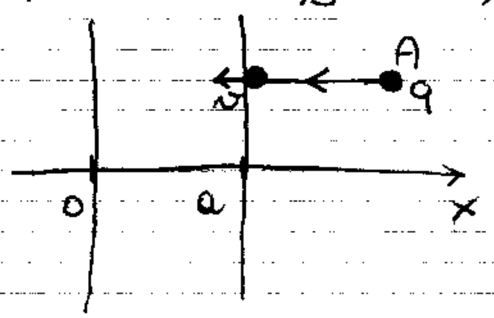
$$= -\int_a^{3a} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}\cdot d\vec{x} = -\int_a^{3a} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dx = \int_a^{3a}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dx =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot(3a-a) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2q}{m}\cdot\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}}$$

numericamente $v = \sqrt{\frac{2\cdot 1\cdot 10^{-9}}{0{,}010}\cdot\frac{2\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}02}{8{,}85\times 10^{-12}}}$ m/s

$v = 0{,}95\times 10^{-3}$ m/s $= 0{,}95$ mm/s (2 cifre signific.)



(q si muove nella direzione $-\hat{x}$)

$$\vec{v} = -v\hat{x}$$