

ESERCIZIO 1

1) Il sistema (molla + pallina ①) conserva la sua energia meccanica poiché non sono presenti forze dissipative.

i = istante iniziale, in cui la pallina ① è ferma nel punto A

f = istante finale, in cui la pallina ① si trova nel punto B con velocità $\vec{v}$

Ponendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale alla quota del punto A ($y=0$) $U_g=0$ anche in B

$$E_i = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_i)^2 \quad \text{con } \Delta \ell_i = \text{compressione della molla all'istante } i$$

$$\Delta \ell_i = L_0 - L_{0/2} = L_{0/2}$$

$\swarrow$ lunghezza a riposo $\downarrow$ lunghezza attuale $\searrow$ compressione

$$\Rightarrow E_i = \frac{1}{2} k \left(\frac{L_0}{2} \right)^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_f)^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad \Delta \ell_f = \text{allungamento della molla all'istante } f$$

$$\Delta \ell_f = \frac{5}{4} L_0 - L_0 = \frac{1}{4} L_0$$

$\swarrow$ lunghezza all'istante f $\searrow$ lunghezza di riposo $\rightarrow$ allungamento

$$E_i = E_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k \left(\frac{L_0}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{L_0}{4} \right)^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = \frac{k}{m} \left(\frac{L_0^2}{4} - \frac{L_0^2}{16} \right)$$

$$V = \frac{2}{m} \frac{k L_0^2}{16} \frac{3}{16}$$

$$V = \frac{L_0}{4} \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$\vec{V} = V \hat{x}$$

②

$$V = \frac{2}{4} \sqrt{\frac{3 \cdot 50}{1,2}} \frac{m}{s} \approx 5,59 \frac{m}{s} \approx 5,6 \frac{m}{s} \quad (2 \text{ cifre significative})$$

②) Durante l'urto in causa, la quantità di moto $\vec{P}$ del sistema (pallina ① + pallina ②) in quanto non sono presenti forze esterne impulsive. Nota che la forza elastica non è una forza impulsiva.

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$\vec{P}_i = \underbrace{m \vec{v}}_{\text{di ①}} + \underbrace{\phi}_{\text{di ②}}$$

Nell'urto completamente anelastico le due palline restano attaccate, formando un unico corpo di massa $m + 2m = 3m$

$$\vec{P}_f = 3m \vec{V}$$

$$\Rightarrow m \vec{v} = 3m \vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{3} \vec{v}$$

$$V = \frac{1}{3} v \rightarrow$$

con

$$\vec{V} = V \hat{x}$$

$$V = \frac{L_0}{12} \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5,59 \frac{m}{s} = 1,86 \frac{m}{s} \approx 1,9 \frac{m}{s} \quad (2 \text{ cifre significative})$$

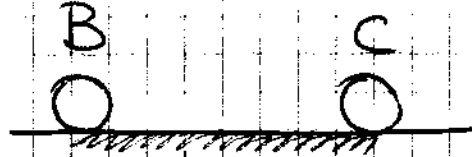
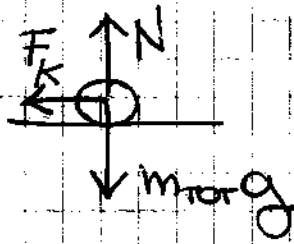
③  le sistema, di massa $3m = m_{\text{tot}}$ si muove da B a C

Diagramma di corpo libero



N = forza normale
 F_k = forza di attrito dinamico

$$N = m_{\text{tot}} g$$

luce $F_k = \mu_k N = \mu_k 3mg$

Teorema dell'energia cinetica (della forza vie)

$$\Delta K = \sum_i W_i$$

Somma dei lavori compiuti sul sistema dalle forze esterne.

$$\Delta K = K_c - K_B$$

$\sum_i W_i = W_k$ → lavoro della forza di attrito ($\vec{N}$ e $3m\vec{g}$ non compiono lavoro poiché sono $\perp$ allo spostamento $\Delta \vec{s}$)

$$W_k = \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{s} = -F_k \Delta s = -\mu_k 3mg \Delta s$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} 3m \left(\frac{V}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} 3m V^2 = -\frac{3m}{2} \cdot \frac{3V^2}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{3m}{2} \frac{3V^2}{4} = -\mu_k 3mg \Delta s$$

$$\Delta s = \frac{3V^2}{8\mu_k g} = \frac{3 \cdot \frac{L_0^2}{12^2} \cdot \frac{3K}{m}}{8\mu_k g}$$

$$\Delta S = \frac{L_0^2 K}{128 \mu_k mg}$$

④

$$\Delta S = 0,166 \text{ m} \approx 0,17 \text{ m} = 17 \text{ cm} \quad (2 \text{ cifre significative})$$

Modo alternativo di calcolare ΔS :

Le due masse svolgono un moto uniformemente decelerato con accelerazione $-\mu_k g$

$$\Delta S = Vt - \frac{1}{2} \mu_k g t^2$$

$$\begin{cases} \frac{V}{2} = V - \mu_k g t \\ \Rightarrow t = \frac{V}{2\mu_k g} \end{cases}$$

$$\Delta S = \frac{V^2}{2\mu_k g} - \frac{1}{2} \mu_k g \cdot \frac{V^2}{4\mu_k^2 g^2} = \frac{3}{4} \frac{V^2}{2\mu_k g} = \frac{3V^2}{8\mu_k g}$$

4) Nel tratto CD non agiscono forze esterne non conservative: si conserva l'energia meccanica del sistema delle palline.

$$E_C = E_D$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot 3m \left(\frac{V}{2} \right)^2$$

$$E_D = 3mgR$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 3m \left(\frac{V}{2} \right)^2 = 3mgR$$

$$R = \frac{V^2}{8g} = \frac{L_0^2 \cdot 3K}{8 \cdot 12^2 mg} = \frac{L_0^2 K}{384 mg}$$

$$R = 0,0442 \text{ m} \approx 4,4 \text{ cm} \quad (2 \text{ cifre significative})$$

ESERCIZIO 2

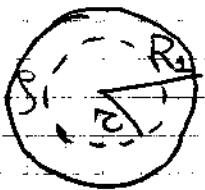
(5)

1) Teorema di Gauss: $\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

Per simmetria, il campo $\vec{E}$ è diretto radialmente e dipende solo da r (distanza dal centro)

$$0 < r < R_1$$

Considero come superficie gaussiana attraverso cui calcolare il flusso una sfera di raggio r



$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E dA$$

elementino di area dA perché $\vec{E} \parallel \vec{r}$

$$\Phi(\vec{E}) = E \left(\int dA \right) = E \cdot 4\pi r^2 \quad \rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{A}$$

$\vec{E}$ uniforme su tutta la superficie superficie totale della sfera

$q_{\text{int}} =$ carica contenuta all'interno della sfera di raggio r

$$q_{\text{int}} = \rho \cdot \underbrace{V}_{\substack{\text{volume} \\ \text{della} \\ \text{sfera di} \\ \text{raggio } r}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

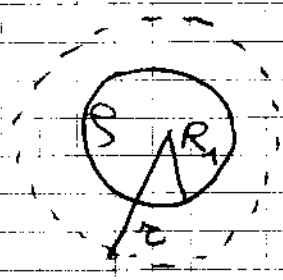
$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

6

$$R_1 < r < R_2$$

$$\Phi(\vec{E}) = E 4\pi r^2$$

per le stesse ragioni di simmetria utilizzate nel caso precedente



q_{int} = tutta la carica contenuta nella sfera

$$q_{int} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

Definisco: $Q_1 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$

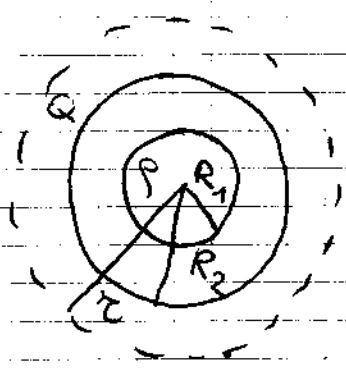
$$\Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$r > R_2$$

$$\Phi(\vec{E}) = E 4\pi r^2$$



$$q_{int} = Q_1 + Q$$

carica della sfera

carica del guscio

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

(7)

2) Nel punto A
per il principio
di sovrapposizione

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \underbrace{\vec{E}}_{\text{campo generato da sfera + gusto}} + \underbrace{\vec{E}_1}_{\text{campo generato dalla carica puntiforme Q}}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{r}_1$$

$\hat{r}_1$ → vettore USCENTE dalla carica Q
 r_1 → distanza al quadrato misurata dal punto in cui si trova la carica puntiforme Q

$$\vec{E}(A) = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 (d/2)^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_1(A) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d/2)^2} \hat{r}_1 =$$

$$= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (d/2)^2} \hat{r}$$

(punta in verso opposto ad $\hat{r}$)

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \left[\frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 (d/2)^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d/2)^2} \right] \hat{r}$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 (d/2)^2} \hat{r}$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{62,8 \cdot 10^9}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1^2} \text{ V/m}$$

$$E_{\text{tot}} = 0,565 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} \approx 0,57 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$\vec{E} = E_{\text{tot}} \hat{r}$$

$$Q_1 = 15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{4}{3} \pi (0,1)^3 \text{ C}$$

$$Q_1 = 0,0628 \mu\text{C}$$

$$Q_1 = 62,8 \text{ nC}$$

2 cifre signif.

$$3) V_{\text{tot}}(A) = \underbrace{V(A)}_{\substack{\text{dovuto alla sfera} \\ + \text{questo}}} + \underbrace{V_1(A)}_{\substack{\text{dovuto alla} \\ \text{carica} \\ \text{finta fuori Q}}}$$

$$V(A) = - \int_{\infty}^A \vec{E}(r) dr = \int_{d/2}^{\infty} \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr =$$

Campo
calcolato nella
regione $r > R_2$

$$= \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{d/2}^{\infty} = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 (d/2)}$$

$$V_1(A) = - \int_{\infty}^A E_1(r_1) dr_1 = \int_{d/2}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} dr_1 =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r_1} \right]_{d/2}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d/2)}$$

$$\Rightarrow V_{\text{tot}}(A) = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 d/2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d/2}$$

$$V_{\text{tot}}(A) = \frac{Q_1 + 2Q}{4\pi\epsilon_0 (d/2)}$$

$$V_{\text{tot}}(A) = \frac{(62,8 + 2 \cdot 45) \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}$$

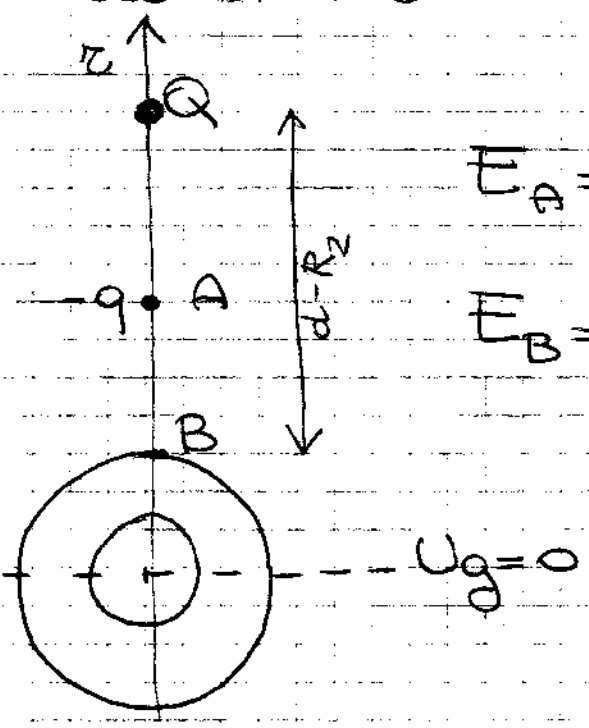
$$V = 1,37 \cdot 10^3 V =$$

$$\approx \boxed{1,4 \text{ KV}}$$

2 cifre signif.

9

4) Conservazione energia meccanica + elettrostatica.



$$E_A = E_B$$

$$E_A = U(A) + mg d/2$$

$$E_B = \underbrace{U(B)}_{\text{energia potenziale elettrostatica}} + mg R_2 + \frac{1}{2} m v^2$$

energia potenziale elettrostatica

$$U(A) = -q V_{\text{tot}}(A)$$

$$U(B) = -q V_{\text{tot}}(B)$$

$$V_{\text{tot}}(B) = V(B) + V_1(B)$$

$$V(B) = \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$V_1(B) = \int_{d-R_2}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} dr_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d-R_2)}$$

$$\rightarrow V_{\text{tot}}(B) = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d-R_2)}$$

$$\Rightarrow -q V_{\text{tot}}(A) + mg d/2 = -q V_{\text{tot}}(B) + mg R_2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = q (V_{\text{tot}}(B) - V_{\text{tot}}(A)) + mg (d/2 - R_2)$$

$$v = \left[\frac{2q}{m} (V_{\text{tot}}(B) - V_{\text{tot}}(A)) + 2g (d/2 - R_2) \right]^{1/2}$$

numericamente:

$$V_{\text{tot}}(B) = \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{62,8 + 45}{0,25} + \frac{45}{2 - 0,25} \right) \text{ V} \quad (10)$$

$$V_{\text{tot}}(B) = 4,11 \cdot 10^3 \text{ V} = 4,11 \text{ kV}$$

$$V = \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{0,001} \left((4,11 - 1,37) \cdot 10^3 + 2 \cdot 9,81 \cdot (1 - 0,25) \right) \right]^{1/2} \text{ m/s}$$

$$V = \sqrt{21,92 + 14,715} \text{ m/s} = 6,05 \text{ m/s}$$

$$\boxed{V = 6,1 \text{ m/s}} \quad 2 \text{ cifre sign.}$$

Calcolo alternativo di $V_{\text{tot}}(A) - V_{\text{tot}}(B)$

$$V_{\text{tot}}(A) - V_{\text{tot}}(B) = \int_A^B \vec{E}_{\text{tot}}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$\text{con } \vec{E}_{\text{tot}}(r) = \left(\frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d-r)^2} \right) \hat{r}$$

(per $R_2 < r < d$)

$$\begin{aligned} V_{\text{tot}}(A) - V_{\text{tot}}(B) &= \int_{d/2}^{R_2} \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr + \int_{d/2}^{R_2} \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d-r)^2} dr \\ &= \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{2}{d} \right) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{d-d/2}^{d-R_2} \frac{1}{y^2} (-dy) = \end{aligned}$$

$$\text{con } y = d - r \rightarrow r = d - y \\ dr = -dy$$

$$= \frac{Q+Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{d} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{y} \right]_{d/2}^{d-R_2} =$$

(11)

$$= \frac{Q+Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{d} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{d} - \frac{1}{d-R_2} \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{Q_1+2Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{d}}_{V(A)_{\text{tot}}} - \underbrace{\frac{Q+Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d-R_2)}}_{V(B)_{\text{tot}}}$$

risultato identico a quello trovato precedentemente